Instructions: **Fichier *éditable* à remplir électroniquement.** Enregistrer le fichier, puis le remplir en utilisant par exemple Xodo sous Android, Evince, Gimp ou Okular sous Linux, Preview sous Mac, Adobe Reader sous Windows (éviter la visionneuse pdf de votre navigateur). N'oubliez pas d'**enregistrer** à nouveau le fichier **avec vos réponses** avant de téléverser/rendre votre copie. **Ne pas imprimer, remplir à la main et scanner ou photographier, toute copie illisible ne sera pas corrigée.**

NOM, prénom, numéro d'étudiant :

TEST Sujet1

11111111

Math4 – CC1 – 25 Février 2020

Règlement –

L'épreuve dure 30 minutes. Les calculatrices sont interdites. **Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.** Il n'est admis de consulter aucun document.

Les questions ont toute une seule bonne réponse, qui vaut **2 points** ou **3 points**.

Attention, il y a 2 questions de cours pour lesquels une réponse fausse vaut **-2 points**.

Cochez une seule réponse par question.

Question 1 [3 points] Quelle domination peut-on utiliser pour montrer la continuité de l'intégrale à paramètre

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} dx$$

pour $p \geqslant 1, x \geqslant 0$?

- ☐ $\left|e^{-(1+x)p}\frac{\cos(x)}{1+x}\right| \leqslant |\cos(x)|$
- ☒ $\left|e^{-(1+x)p}\frac{\cos(x)}{1+x}\right| \leqslant e^{-x}$
- ☐ $\left|e^{-(1+x)p}\frac{\cos(x)}{1+x}\right| \leqslant e^{-(1+x)p}$
- ☐ $e^{-(1+x)p}\frac{\cos(x)}{1+x} \leqslant \frac{\cos(x)}{1+x}$
- ☐ $e^{-(1+x)p}\frac{\cos(x)}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+x}$
- ☐ $\left|e^{-(1+x)p}\frac{\cos(x)}{1+x}\right| \leqslant \frac{|\cos(x)|}{1+x}$
- ☐ $\left|e^{-(1+x)p}\frac{\cos(x)}{1+x}\right| \leqslant \frac{1}{1+x}$
- ☐ $e^{-(1+x)p}\frac{\cos(x)}{1+x} \leqslant \cos(x)$
- ☐ aucune des autres réponses

Question 2 [2 points] Laquelle parmi les intégrales suivantes est convergente ?

- ☐ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$
- ☐ $\int_0^{1} \frac{1}{t} dt$
- ☒ $\int_1^{+\infty} e^{-2t} dt$
- ☐ $\int_1^{+\infty} e^{t} dt$

Question 3 [2 points] Parmi les fonctions suivantes, laquelle est équivalente à $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ en $x \to 0$?

- [x] x
- [ ] $-x$
- [ ] 1
- [ ] $-\frac{x^2}{2}$
- [ ] $\frac{x}{2}$
- [ ] $-\frac{x}{2}$
- [ ] 0
- [ ] $\frac{x^2}{2}$

Question 4 Que vaut l'intégrale $I = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ pour $x > 1$?

- [ ] $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$
- [ ] $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$
- [ ] $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$
- [x] $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$
- [ ] $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$
- [ ] $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$
- [ ] $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$
- [ ] $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$

Explanation: cd TD1 ex 4 pour la correction

Question 5 Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$?

- [ ] absolument convergente
- [ ] divergente
- [x] convergente
- [ ] aucune des autres réponses

Explanation: cf. TD1 ex 4 pour la correction

Question 6 Parmi les fonctions suivantes, laquelle est équivalente à $f(x) = x - x\cos(x)$ en $x \to 0$?

- [ ] $\frac{x^4}{3}$
- [ ] $x - x$
- [ ] $-\frac{x^3}{2}$
- [ ] 0
- [ ] $-\frac{x^4}{3}$
- [ ] x
- [ ] $x - x^2$
- [x] $\frac{x^3}{2}$

Explanation: Par le cours, en $x \to 0$, $\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ donc $f(x) = x^3/2 + o(x^3)$

Question 7 [3 points] Si on peut appliquer le théorème de dérivation à l'intégrale à paramètre

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} dx,$$

quel résultat obtiendra-t-on pour la dérivée de F?

- [ ] $F'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+x)p} \cos(x) dx$
- [ ] $F'(p) = \int_0^{+\infty} pe^{-(1+x)p} \cos(x) dx$
- [ ] $F'(p) = -\int_0^{+\infty} pe^{-(1+x)p} \cos(x) dx$
- [ ] $F'(p) = \int_0^{+\infty} pe^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} dx$
- [ ] $F'(p) = -\int_0^{+\infty} pe^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} dx$
- [x] $F'(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-(1+x)p} \cos(x) dx$

Explanation: Un corrigé détaillé est disponible dans le CC1 2019 à l'exo 2.3:
http://math.univ-lyon1.fr/~dabrowski/enseignement/Math4/CC1-20190225Correction.pdf

Question 8 [3 points] Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2} dt$?

- ☐ convergente en 0 et divergente en $+\infty$
- ☐ divergente en 0 et convergente en $+\infty$
- ☐ divergente en 0 et divergente en $+\infty$
- ☒ convergente en 0 et convergente en $+\infty$