

Instructions: **Fichier éditable à remplir électroniquement.** Enregistrer le fichier, puis le remplir en utilisant par exemple Xodo sous Android, Evince, Gimp ou Okular sous Linux, Preview sous Mac, Adobe Reader sous Windows (éviter la visionneuse pdf de votre navigateur). N'oubliez pas d'**enregistrer** à nouveau le fichier **avec vos réponses** avant de téléverser/rendre votre copie. **Ne pas imprimer, remplir à la main et scanner ou photographier, toute copie illisible ne sera pas corrigée.**

NOM, prénom, numéro d'étudiant :

## TEST Sujet2

11111112

### Math4 – CC1 – 25 Février 2020

#### Règlement –

L'épreuve dure 30 minutes. Les calculatrices sont interdites. **Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.** Il n'est admis de consulter aucun document.

Les questions ont toute une seule bonne réponse, qui vaut **2 points** ou **3 points**.

Attention, il y a 2 questions de cours pour lesquels une réponse fautive vaut **-2 points**.

Cochez une seule réponse par question.

**Question 1** [3 points] Quelle domination peut-on utiliser pour montrer la continuité de l'intégrale à paramètre

$$F(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} dx,$$

pour  $t \in \mathbb{R}, x > 1$  ?

- $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leq \frac{\pi}{2x}$ 
  $\left| \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \right| \leq \frac{\pi}{2}$ 
  $\left| \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \right| \leq \frac{\pi}{2x^3}$ 
  $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leq \frac{\pi}{2}$
- $\left| \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \right| \leq |\arctan(xt)|$ 
  $\left| \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \right| \leq \frac{\pi}{2x}$ 
  $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leq \arctan(xt)$
- $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leq \frac{\pi}{2x^3}$ 
 aucune des autres réponses

**Explanation:** Un corrigé partiel est disponible dans le CC1 2016 à l'exo 3.2 (la domination est donnée avec le calcul de la dérivée, pour lequel il manque d'ailleurs la domination de la dérivée oubliée par l'enseignant de l'époque, mais la domination de la fonction est suffisante pour la continuité, comme ici):

<http://math.univ-lyon1.fr/~dabrowski/enseignement/Math4/Math4-2016-CC-2-corrige.pdf>

**Question 2** [3 points] Si on peut appliquer le théorème de dérivation à l'intégrale à paramètre

$$F(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} dx,$$

quel résultat obtiendra-t-on pour la dérivée de  $F$ ?

<input type="checkbox"/> $F'(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(xt)(1+3x^2)}{x^2(1+x^2)^2} dx$	<input checked="" type="checkbox"/> $F'(t) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+x^2)} dx$
<input type="checkbox"/> $F'(t) = -\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(xt)(1+3x^2)}{x^2(1+x^2)^2} dx$	<input type="checkbox"/> $F'(t) = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+x^2)} dx$
<input type="checkbox"/> $F'(t) = \int_1^{+\infty} \frac{t}{x(1+x^2t^2)(1+x^2)} dx$	<input type="checkbox"/> $F'(t) = -\int_1^{+\infty} \frac{t}{x(1+x^2t^2)(1+x^2)} dx$

**Explanation:** Un corrigé partiel est disponible dans le CC1 2016 à l'exo 3.2:

<http://math.univ-lyon1.fr/~dabrowski/enseignement/Math4/Math4-2016-CC-2-corrige.pdf>

**Question 3** Parmi les fonctions suivantes, laquelle est équivalente à  $f(x) = x^2 - x \sin(x)$  en  $x \rightarrow 0$ ?

<input type="checkbox"/> $-\frac{x^4}{6}$	<input type="checkbox"/> $x^2 - x^2$	<input type="checkbox"/> $0$	<input type="checkbox"/> $-\frac{x^3}{2}$	<input checked="" type="checkbox"/> $\frac{x^4}{6}$	<input type="checkbox"/> $\frac{x^4}{3}$
		<input type="checkbox"/> $-x$	<input type="checkbox"/> $-\frac{x^4}{3}$		

**Explanation:** Par le cours, en  $x \rightarrow 0$ ,  $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3)$  donc  $f(x) = x^4/6 + o(x^4)$

**Question 4** [3 points] Laquelle parmi les intégrales suivantes est convergente ?

<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \frac{1}{t^3} dt$	<input type="checkbox"/> $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$	<input checked="" type="checkbox"/> $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$	<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$
------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------

**Question 5** [3 points] Quel est le développement limité à l'ordre 2 de  $f(x) = (1+x)^{1/3}$  en  $x \rightarrow 0$  ?

<input type="checkbox"/> $-\frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + o(x^2)$	<input type="checkbox"/> $-\frac{x}{3} + o(x^2)$	<input type="checkbox"/> $1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$
<input type="checkbox"/> $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + o(x^2)$	<input checked="" type="checkbox"/> $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$	<input type="checkbox"/> $\frac{x}{3} + o(x^2)$
<input type="checkbox"/> $\frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$	<input type="checkbox"/> $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + o(x^2)$	

**Question 6** Que vaut l'intégrale  $I = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$  pour  $x > 1$  ?

<input type="checkbox"/> $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$	<input type="checkbox"/> $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$
<input type="checkbox"/> $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$	<input checked="" type="checkbox"/> $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$
<input type="checkbox"/> $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$	<input type="checkbox"/> $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$
<input type="checkbox"/> $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$	<input type="checkbox"/> $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) + \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$

**Explanation:** cd TD1 ex 4 pour la correction

**Question 7** Quelle est la nature de l'intégrale suivante  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  ?

- convergente       divergente       absolument convergente  
 aucune des autres réponses

**Explanation:** cf. TD1 ex 4 pour la correction

---

**Question 8** [3 points] Quelle est la nature de l'intégrale suivante  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} e^{-t} dt$  ?

- convergente en 0 et convergente en  $+\infty$        divergente en 0 et convergente en  $+\infty$   
 divergente en 0 et divergente en  $+\infty$        convergente en 0 et divergente en  $+\infty$
-