Modélisation risque-neutre des taux d’intérêt nominaux

Cours ISFA

5 DECEMBRE 2022

Milliman

Instruments de taux

Instruments financiers élémentaires

- **Compte du marché monétaire**
  - Le compte du marché monétaire correspond à un placement qui se capitalise de manière continue au taux sans risque du marché à chaque instant au taux court r_t. Soit $B(t)$ sa valeur à la date t, sa dynamique est régie par l'équation différentielle suivante :
  $$dB(t) = r_t B(t) dt, \qquad B(0) = 1$$
  - La résolution de cette équation différentielle donne :
  $$B(T) = B(t) \exp\left(\int_t^T r_s ds\right)$$
- **Déflateur**
  - Le déflateur, ou facteur d'actualisation, entre les instants t et T, noté $D(t,T)$, est le montant équivalent à l'instant t à une unité monétaire payable en T capitalisée au taux court r_s. Formellement :
  $$D(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$$
  - Sous la probabilité risque-neutre **tout processus de prix actualisé est une martingale**
  - La probabilité risque-neutre est un outil très pratique pour la valorisation de produits financiers puisqu'elle permet d'exprimer le prix d'un actif en date $t = 0$ à partir d'un calcul d'espérance des flux futurs actualisés
  - L'**existence** de la probabilité risque-neutre et son **unicité** sont largement adressés dans la littérature et découlent de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et de l'hypothèse de complétude du marché
- **Obligation zéro-coupon (ZC)**
  - Une obligation zéro-coupon (ZC) de maturité T est un contrat qui garantit à son détenteur une unité de monnaie à T, **sans paiement intermédiaire**. $P(t,T)$ désigne sa valeur au temps $t < T$ et est généralement nommé prix ZC. En particulier, $P(T,T) = 1$ pour tout T

Instruments de taux

Conventions de taux

- **Taux d'intérêt en composition continue**
  - Le taux d'intérêt en composition continue, noté $R(t,T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t,T)$ unité de monnaie à la date t croît **exponentiellement** pour atteindre une unité de monnaie à l'échéance T. Formellement :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln\big(P(t,T)\big)$$

- **Taux d'intérêt en composition simple**
  - Le taux d'intérêt en composition simple à la date t pour la maturité T, noté $L(t,T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t,T)$ unité de monnaie croît **proportionnellement au temps d'investissement** pour rapporter une unité de monnaie à T. Formellement :

$$L(t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P(t,T)} - 1\right)$$

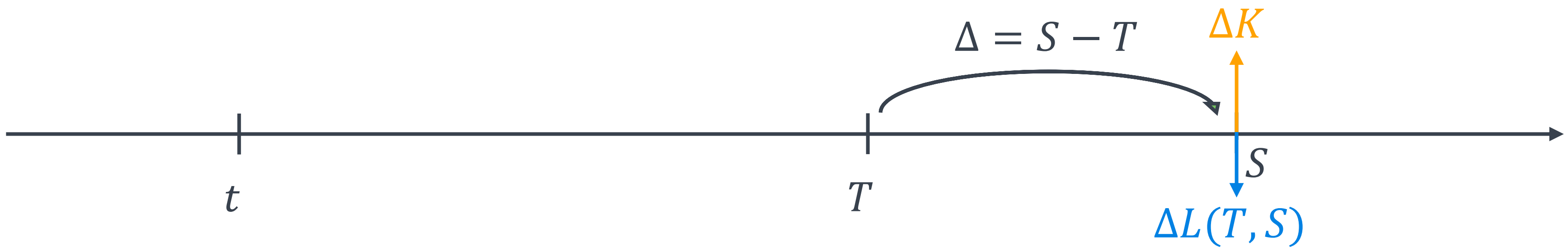
- **Taux d'intérêt en composition annuelle**
  - Le taux d'intérêt en composition annuelle à la date t pour la maturité T, noté $Y(t,T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t,T)$ unité de monnaie croît en étant **réinvestie une fois par an** pour atteindre une unité de monnaie à T. Formellement :

$$Y(t,T) = \frac{1}{P(t,T)^{\frac{1}{T-t}}} - 1$$

Instruments de taux

Taux forward

- **<u>Contrat *FRA (Forward Rate Agreement)*</u>**
  - Un contrat FRA est un contrat payant à son détenteur un taux d'intérêt fixe K à la maturité S contre le paiement à cette même date d'un taux d'intérêt variable $L(T,S)$ gelé en T (appelé expiration) pour la période $[T;S]$. Il est signé de gré à gré et aucune procédure d'échange monétaire n'a lieu au moment de sa signature :



- **<u>Taux forward</u>**
  - Le taux forward est définit comme **l'unique valeur K qui annule le contrat FRA** à la date t
  - Il est possible de montrer que le taux forward $F(t,T,S)$, expirant en T et de maturité $S > T$, s'exprime en fonction des prix ZC :

$$F(t,T,S) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right)$$

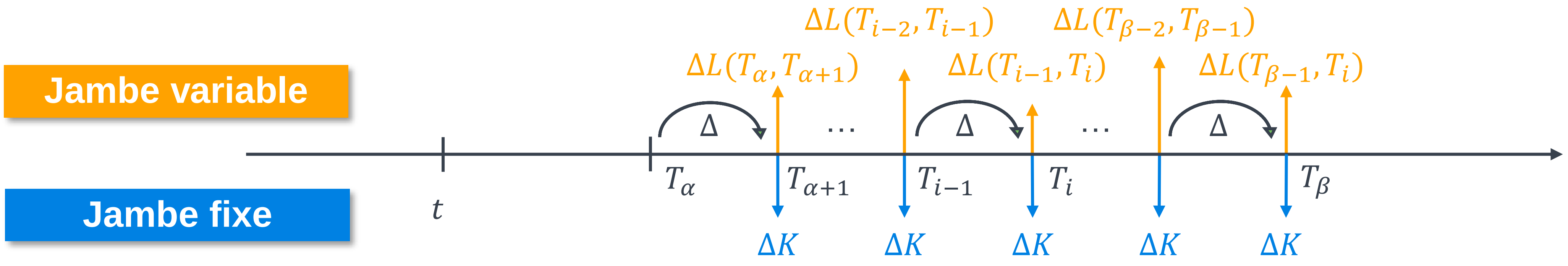
  - Dans le cadre des modèles de la famille LMM, la notation du taux forward est souvent **réduite à deux indices**, k et t :

$$F_k(t) \coloneqq F(t,T_k,T_{k+1})$$

Instruments de taux

Taux swap forward

- **Contrat swap forward**
  - Un contrat swap forward **payeur** est un contrat payant à son détenteur, à chaque date $T_i = T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$, un taux d'intérêt variable $L(T_{i-1}, T_i)$ gelé en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}; T_i]$ contre un taux fixe K. La date T_α est appelée **maturité** et la durée du swap $T_\beta - T_\alpha$ est appelée **tenor** :



  - Alternativement, un contrat swap forward **receveur**, paye à son détenteur la jambe fixe contre la jambe variable

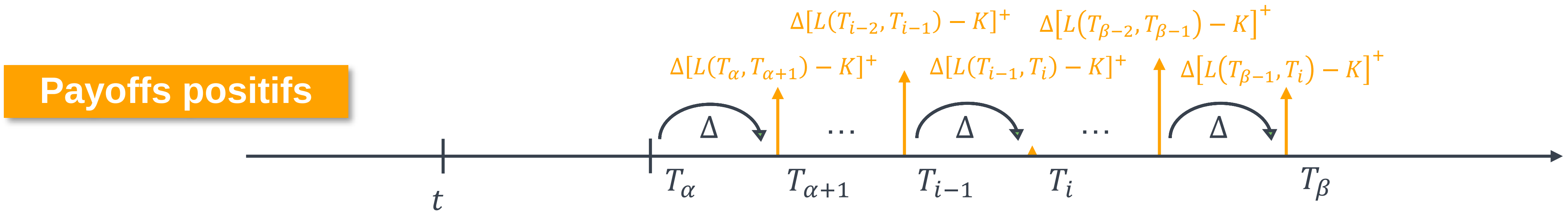
- **Taux swap forward**
  - Le taux swap forward est définit comme **l'unique valeur K qui annule le contrat swap forward** à la date t
  - Il est possible de montrer que le taux forward $S_{\alpha,\beta}(t)$, de maturité T_α et de tenor $T_\beta - T_\alpha$ s'exprime en fonction des prix ZC :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P\left(t, T_\beta\right)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \Delta P(t, T_i)}$$

Instruments de taux

Produits dérivés de taux

- **Cap**
  - Un cap est un **contrat de couverture** sur les taux, payant à son détenteur, à chaque dates $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$, la différence entre le taux variable L et un taux d'intérêt fixe K, uniquement si celle-ci est supérieure à 0. K est appelé **prix d'exercice** du cap ou **strike** :



  - Alternativement, un **floor** paye à son détenteur la différence entre le taux fixe K et le taux variable L, si celle-ci est supérieure à 0
- **Swaption**
  - Une swaption payeuse est un **contrat de couverture** sur les taux qui donne le droit à son détenteur d'entrer dans un swap payeur de strike K, à la date T_α, appelée maturité de la swaption. La durée du swap $T_\beta - T_\alpha$ est appelée tenor
  - Dans le cas où le détenteur de la swaption **paie** (resp. reçoit) le taux fixe K et **reçoit** (resp. paie) le taux variable $L(T_{i-1}, T_i)$, on parle de **swaption payeuse** (resp. receveuse)
  - Sous probabilité dite *level-neutre*, il est possible d'écrire la swaption, directement comme une option sur le taux swap forward :

$$PS_{\alpha,\beta,K} = A_{\alpha,\beta}(0)\mathbb{E}^{A_{\alpha,\beta}}\left[\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K\right)^+\right]$$

Annuité de la swaption :
$A_{\alpha,\beta}(t) := \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \Delta P(t, T_i)$

Modèles de taux

Famille de modèles de diffusion des taux nominaux

- Objectif : définir un modèle qui permet de diffuser la courbe de prix zéro-coupon
- **Modèles de taux courts**
  - Modélisation de la dynamique du taux court sous la probabilité risque-neutre. Historiquement, les premiers modèles de taux sont des modèles de taux courts : Vasicek, CIR. Ces derniers sont calibrés sur la courbe des taux ZC initiale, et ne la répliquent pas exactement.
  - Introduction des modèles d'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) : CIR++, HW, BK. Ils intègrent une fonction déterministe (aussi appelée cale) permettant par construction une réplication exacte de la courbe des taux ZC initiale → Cette approche nécessite de calibrer les modèles sur des dérivés de taux (caps/floors/swaptions).
  - **Remarque 1** : Les modèles de taux courts affines à 1 facteur (Vasicek, CIR, HW) induisent une corrélation parfaite entre les taux ZC en composition continue de différentes maturités.
  - Passage à des modèles à plusieurs facteurs pour améliorer la modélisation de la structure de corrélation des taux ZC : Vasicek à deux facteurs, G2++, CIR2++, BK à 2 facteurs, …
  - **Remarque 2** : Les modèles gaussiens (Vasicek , HW, G2++) permettent de simuler des taux négatifs.
  - **Remarque 3** : Tous ces modèles se placent sous la probabilité risque neutre usuelle, mesure martingale associée au déflateur $e^{-\int_0^t r(s)ds}$.
- **Modèles de marché (famille LIBOR Market Model)**
- Modélisation des quantités directement observables sur le marché $F_k(t)$ (contrairement aux taux forward instantanés HJM).
- Plusieurs déclinaisons du modèle existent

	LMM	*DDLMM*	*DDSVLMM*
Shift (δ)	0	> 0	> 0
Volatilité (ξ_k)	**Déterministe**	**Déterministe**	**Stochastique**

- Ces modèles sont calibrés sur des dérivés de taux : caps / floors / swaptions.

Modèles de taux

LMM – Présentation du modèle

- On note $F_k(t)$ le taux forward en t sur la période d'intérêt $[T_k, T_{k+1}]$
- **Cadre général du Libor Market Model (LMM)** à 2 facteurs :

$$dF_k(t) = F_k(t)(\xi_k^1(t) \times dZ_k^1(t) + \xi_k^2(t) \times dZ_k^2(t))$$

$\xi_k^q(t)$: **volatilité du k-ième taux forward** relativement aux facteurs 1 et 2. La spécification du facteur 1 vs le facteur 2 permet de **prendre en compte la corrélation** entre les taux des différentes maturités

Z_k^1 et Z_k^2 sont des mouvements browniens indépendants **sous la mesure forward neutre** associée à la maturité $\boldsymbol{T_{k+1}}$

- L'utilisation du LMM pour simuler une table de scénarios économiques est sujette à plusieurs étapes
  - Etape 1 : spécification de la dynamique des taux forward sous leur probabilité forward neutre respective
  - Etape 2 : spécification de la dynamique de tous les taux forward sous une même mesure; la mesure risque neutre
  - Etape 3 : choix de la forme de la structure de volatilité $\xi_k^q(t)$. Cette dernière est spécifiée en fonction des paramètres du modèle
  - Etape 4 : calibrage des paramètres du modèle pour répliquer des prix de swaptions à la date de valorisation
  - Etape 5 : discrétisation de la dynamique du modèle selon une équation récursive
- **Remarque** : Les facteurs de risque peuvent être corrélés aux autres facteurs modélisés (actions, immobilier,…) lors de la génération des scénarios économiques

Modèles de taux

LMM – Calibrage et simulation

- **Calibrage** : **minimiser l'écart entre les prix** de marché de swaptions et les prix de swaptions dits modèle, i.e. induits par les formules fermées du LMM :

Marché		Modèle		Paramètres du modèle
Extraction de la matrice de volatilités des swaptions sur les marchés financiers *at-the-money* (ATM) et *away-from-the-money* (AFM)	Détermination des **prix de marché** des swaptions ATM et AFM	Détermination des **prix modèle** des swaptions ATM et AFM par formule fermée	→	Détermination des **valeurs optimales des paramètres** en minimisant les écarts entre les prix de marché et les prix modèle des swaptions ATM et AFM

Minimisation de l'écart entre la valeur de marché et la valeur modèle

- **Remarque** : le calibrage peut aussi être effectué en minimisant l'écart entre les volatilités
- **Simulation** : Une fois les paramètres calibrés, la procédure de **simulation** est la suivante :
  - *Etape 1* : **Génération de l'ensemble des aléas** du modèle selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$
  - *Etape 2* : Obtention de la courbe des taux forwards de la date T_{k+1} à partir de celle de date T_k via une relation de récurrence
  - *Etape 3* : Déduction des **prix zéro-coupon**

Modèles de taux

DDLMM – Présentation du modèle

$$F_k(t) \coloneqq F(t, T_k, T_{k+1})$$

- Le modèle DDLMM (Displaced Diffusion LMM) est très proche du modèle LMM, sa dynamique sous la **probabilité forward neutre** associée est la suivante :

$$dF_k(t) = (F_k(t) + \delta)(\xi_k^1(t) \times dZ_k^1(t) + \xi_k^2(t) \times dZ_k^2(t))$$

- Par rapport au cadre au LMM, un **coefficient de déplacement $\boldsymbol{\delta}$**, également dénommé **shift** est ajouté. Il permet de **générer des taux négatifs**
- Par ailleurs, la structure de volatilité du DDLMM se décompose en 3 fonctions :

$$\xi_k^q(t) = g(T_k - t) f(t) b^q(T_k - t)$$

  - La **fonction $\boldsymbol{g}$ dite de forme**, dépend du temps restant à expiration des taux forward $T_k - t$. Elle suit une paramétrisation à 4 paramètres :

$$g(x) = (a + bx)e^{-cx} + d$$

  - La **fonction $\boldsymbol{f}$ dite d'échelle** dépend du temps t. Elle suit une paramétrisation à 2 paramètres :

$$f(x) = \theta + (1 - \theta)e^{-\kappa x}$$

  - La **fonction $\boldsymbol{b^q}$ dite structure de corrélation interforward** dépend du temps restant à expiration des taux forward $T_k - t$. Sa valeur est déterminée en amont du calibrage via une étude historique dédiée. On parle de méta-paramètre (ou paramètre embarqué du GSE)
- Le DDLMM induit des formules fermée permettant d'exprimer le prix des swaptions en fonction des **6 paramètres** du modèle $(a, b, c, d, \theta, \kappa)$ qui peuvent être calibrés selon la procédure décrite en slide 3

Modèles de taux

DDLMM – Obtention de formules fermées

$$PS_{\alpha,\beta,K} = A_{\alpha,\beta}(0)\mathbb{E}^{A_{\alpha,\beta}}\left[\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K\right)^+\right]$$

- Le DDLMM repose sur 6 paramètres $\mathcal{P} \coloneqq (a, b, c, d, \theta, \kappa)$
- Principe de valorisation :

1. Expression de la **dynamique du taux swap forward shifté** sous la probabilité *level-neutre*, sous la forme :

$$\frac{d\left(S_{\alpha,\beta}(t) + \delta\right)}{S_{\alpha,\beta}(t) + \delta} = \boldsymbol{\nu}_{\alpha,\beta}(t).\, d\boldsymbol{Z}_{\alpha,\beta}(t)$$

Où $\boldsymbol{\nu}_{\alpha,\beta}$ est une **fonction des taux forward**, donc stochastique :

$$\boldsymbol{\nu}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\nu}_{\alpha,\beta}\left(t; \boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{t}), \dots \boldsymbol{F}_\beta(\boldsymbol{t})\right)$$

2. **Freezing** de $\boldsymbol{\nu}_{\alpha,\beta}$ pour la rendre déterministe :

$$\boldsymbol{\nu}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{t}) \approx \boldsymbol{\nu}_{\alpha,\beta}\left(t; F_\alpha(\boldsymbol{0}), \dots F_\beta(\boldsymbol{0})\right)$$

3. Dans ce cadre la dynamique du taux swap forward shifté est **log-normale**. Le pricing de la swaption se ramène alors au calcul d'une **formule de Black** de strike $K + \delta$

$$\begin{aligned} PS^{Modele}_{\alpha,\beta,K}(\mathcal{P}) &= A_{\alpha,\beta}(0)\mathbb{E}^{A_{\alpha,\beta}}\left[\left(\boldsymbol{S}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{T}_\alpha) + \boldsymbol{\delta} - [\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\delta}]\right)^+\right] \\ &= A_{\alpha,\beta}(0) Black\left(\boldsymbol{S}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}_{\alpha,\beta}\right) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha,\beta} \coloneqq \sqrt{\int_0^{T_\alpha} \boldsymbol{\nu}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{t})^2 \boldsymbol{dt}}$$

- Cette approche permet d'obtenir une **formule analytique** pour le prix de la swaption qui dépend des 6 paramètres du modèle DDLMM

Modèles de taux

DDSVLMM – Présentation du modèle

- Le modèle DDSVLMM (Displaced Diffusion with Stochastic Volatility LMM), aussi appelé LMM+ sur la place, reprend le cadre général du DDLMM :

$$dF_k(t) = (F_k(t) + \boldsymbol{\delta})(\xi_k^1(t) \times dZ_k^1(t) + \xi_k^2(t) \times dZ_k^2(t))$$

- La structure de volatilité du DDSVLMM est stochastique. La fonction d'échelle $f(t)$ du DDLMM est remplacée par un processus $\sqrt{V(t)}$ avec $V(t)$ un processus de variance dynamisé par un processus Cox-Ingersoll-Ross (CIR) dépendant de 4 paramètres, et p.s. positif :

$$dV(t) = \kappa\big(\theta - V(t)\big)dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dW(t)$$

Le mouvement brownien W est corrélé aux mouvements browniens Z_k^1 et Z_k^2 via un paramètre additionnel ρ

- Le DDSVLMM induit des formules semi-fermées pour le prix des swaptions :
  - Elles sont obtenues à partir de l'expression de la **fonction caractéristique du log-rendement du taux swap** sous-jacent à la swaption
  - Elles reposent sur des calcul d'intégrale numériques, d'où la qualification de « formules semi-fermées »
  - Elles dépendent des **8 paramètres** du modèle $(a, b, c, d, \theta, \kappa, \varepsilon, \rho)$ qui peuvent être calibrés selon la procédure décrite en slide 3

- **Remarque** : Le processus de simulation est lui aussi plus complexe, nécessitant de discrétiser le processus CIR, V

Modèles de taux

DDSVLMM – Obtention de formules fermées (1/2)

- Le DDSVLMM repose sur **8 paramètres** $\mathcal{P} \coloneqq (a, b, c, d, \theta, \kappa, \varepsilon, \rho)$, dont 4 paramètres $(\theta, \kappa, \varepsilon, \rho)$ concernent la composante de volatilité stochastique régie par un processus CIR
- Du fait de la volatilité stochastique, le pricing des swaptions avec le DDSVLMM nécessite d'utiliser la **fonction caractéristique du log-rendement du taux swap forward** sous-jacent à la swaption
- Principe de valorisation :

  1. Etude de la dynamique de $X(T_\alpha) = \ln\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)+\delta}{S_{\alpha,\beta}(0)+\delta}\right)$ le log-ratio du taux swap forward shifté entre la date $t = 0$ et la maturité T_α
  2. **Expression analytique de la fonction carctéristique** $M_{X(T_\alpha)}(z) \coloneqq \mathbb{E}^{A_{\alpha,\beta}}\left[e^{zX(T_\alpha)}\right]$ associée à $X(T_\alpha)$ sous la mesure *level-neutre*
  3. Expression du prix la swaption **en fonction de la fonction caractéristique**, qui est elle-même fonction des paramètres du modèle :

$$PS_{\alpha,\beta,K}^{Modele}(\mathcal{P}) = A_{\alpha,\beta}(0)\mathbb{E}^{A_{\alpha,\beta}}\left[\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K\right)^+\right] = f\left(M_{X(T_\alpha)}\right)$$

- Cette approche permet d'obtenir une **formule analytique** pour le prix de la swaption qui dépend des 8 paramètres du modèle DDSVLMM. Cette formule nécessite des calculs d'intégrales numériques (dont l'intégrande est à valeurs dans $\mathbb{C}$), aussi on parle de **formule semi-fermée**
- **Remarque** : la formule de pricing présente une forte analogie avec les modèles action Heston et SVJD dans lesquels les formules de pricing reposent sur la fonction caractéristique du log-rendement de l'indice action

Modèles de taux

DDSVLMM – Obtention de formules fermées (2/2)

- L'approche de calibrage standard du modèle DDSVLMM nécessite des **calculs numériques intensifs**, allongeant les temps de calibrage
- Dans un cadre nécessitant des recalibrages rapides du modèle, il existe des **méthodologies d'approximation** permettant d'optimiser les temps de calcul :
  - Sur ce sujet, en 2019, l'équipe R&D de Milliman a produit une publication : *Fast calibration of the Libor market model with stochastic volatility and displaced diffusion*. Journal of Industrial & Management Optimization, 1-32
  - Cette méthodologie propose d'approcher directement la densité du taux swap forward à partir **d'expansions de Gram-Charlier ou d'Edgeworth**. Les prix de swaptions sont alors obtenus par formule fermée comme présenté ci-dessous. Cette approche permet de réduire jusqu'à 100 fois les temps de calibrage tout en conservant une bonne qualité de réplication des volatilités de marché.

Méthode	Formule de pricing
Utilisation d'expansions de densité (par exemple Edgeworth)	$$\begin{aligned} PS_{\alpha,\beta,K}^{Modele}(\mathcal{P}) &= A_{\alpha,\beta}(0)\mathbb{E}^{A_{\alpha,\beta}}\left[\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K\right)^+\right] \\ &= \nu A_{\alpha,\beta}(0)\left\{\varphi(z_K) - z_K\phi(z_K) + \varphi(z_K)\left[\frac{\mu_3}{6}z_K + \frac{\mu_4-3}{24}(z_K^2-1) + \frac{\mu_3^2}{72}(z_K^4-6z_K^2+3)\right]\right\}, \end{aligned}$$ avec $z_K = \frac{K-S_{\alpha,\beta}(0)}{\nu}$; $\mu_k = \mathbb{E}^{A_{\alpha,\beta}}\left[\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-S_{\alpha,\beta}(0)}{\nu}\right)^k\right]$; $\nu = \mathbb{E}^{A_{\alpha,\beta}}\left[\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-S_{\alpha,\beta}(0)\right)^2\right]$; $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}/\sqrt{2\pi}$ et $\phi'(x) = \varphi(x)$

  - Cette approche implique une dégradation légère des tests de repricing, qui demeurent cependant satisfaisants
  - Il existe d'autres approches d'approximations basées sur des expansions de la densité, comme l'approche **COS-pricing**

Modèles de taux

G2++ – Présentation du modèle

- Le modèle G2++ est un **modèle gaussien** de taux court à 2 facteurs, équivalent au modèle de Hull et White à 2 facteurs :

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t) + \varphi(t)$$

$$dx_1(t) = -ax_1(t)dt + \sigma dW_1(t)$$

$$dx_2(t) = -bx_1(t)dt + \eta dW_2(t)$$

Les mouvements browniens W_1 et W_2 sont corrélés via un paramètre additionnel ρ

- La fonction φ est **entièrement déterminée par les données initiales** et permet de répliquer parfaitement la courbe des taux initiale.

- Les taux générés par le modèle G2++ étant gaussiens, ces derniers peuvent atteindre des **valeurs arbitrairement négatives**

- Le G2++ induit des formules fermées pour le prix des swaptions :
  - Elles s'expriment de manière exacte comme une intégrale dont l'**intégrande nécessite la résolution d'une équation non linéaire**
  - Il existe des méthodes d'approximation permettant d'obtenir des formules fermées **plus rapides à calculer**
  - Elles dépendent des **5 paramètres** du modèle $(a, b, \sigma, \eta, \rho)$ qui peuvent être calibrés selon la procédure décrite en slide 3

Modèles de taux

Comparaison des modèles

	DDLMM	DDSVLMM (LMM+)	G2++
Possibilité de simuler des taux négatifs	Oui	Oui	Oui
Ajustement parfait de la courbe des taux initial	Oui	Oui	Oui
Formule de pricing fermée ou semi-fermée	Oui	Oui	Oui
Nombre de paramètres	6	8	5
Qualité du fit ATM	+++	+++	++
Qualité du fit AFM	++ (prend en compte le skew)	+++ (prend en compte le skew et le smile)	+
Complexité / stabilité du processus de calibration	+	+++	+
Complexité du processus de simulation	++	+++	+

Calibrage des modèles de taux

Fonction cible de calibrage

- **Le calibrage cherche à répliquer l'une des quantités de marché suivantes :**
  - Prix des swaptions:

$$\hat{\mathcal{P}} \in \boldsymbol{Argmin}\left\{\sum_{\alpha,\beta,K} \omega_{m,n,K} \text{ distance}\left(PS_{\alpha,\beta,K}^{Modele}(\mathcal{P}); PS_{\alpha,\beta,K}^{Marché}\right); \mathcal{P} \text{ en satisfaisant les contraintes}\right\}$$

  - Volatilité implicite des swaptions:

$$\hat{\mathcal{P}} \in \boldsymbol{Argmin}\left\{\sum_{\alpha,\beta,K} \omega_{m,n,K} \text{ distance}\left(\sigma_{\alpha,\beta,K}^{Modele}(\mathcal{P}); \sigma_{\alpha,\beta,K}^{Marché}\right); \mathcal{P} \text{ en satisfaisant les contraintes}\right\}$$

Remarque: Les volatilités implicites du modèle sont obtenues en inversant la formule de Black ou de Bachelier sur les prix modèles.

- **Fonction de distance** : $distance\left(X^{Model}(\mathcal{P}); X^{Market}\right) = \left(X^{Model}(\mathcal{P}) - X^{Market}\right)^2$ (carré des erreurs absolues);

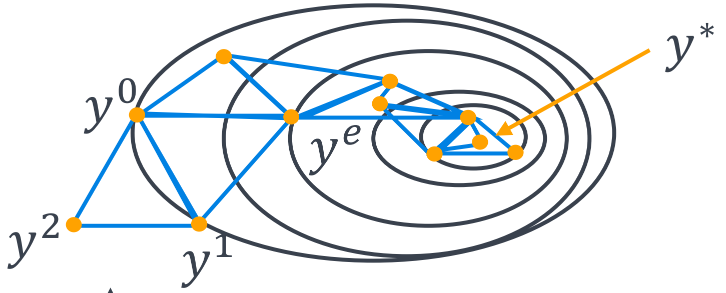
$$= \left(\frac{X^{Model}(\mathcal{P}) - X^{Market}}{X^{Market}}\right)^2 \text{ (carré des erreurs relatives).}$$

- **Pondérations** :
  - Les poids $\boldsymbol{\omega_{m,n,K}}$ peuvent être considérés comme uniformes (égaux à un)
  - Il existe des **approches plus avancées** (c.f. atelier 3) qui consistent à déterminer les pondérations de sorte à mieux reproduire certains sous-ensembles stratégiques de prix/volatilités de swaptions. Le **calibrage** et la **justification** des pondérations restent une tâche complexe, impliquant le développement d'une méthodologie spécifique combinée à **des calculs ALM intensifs**

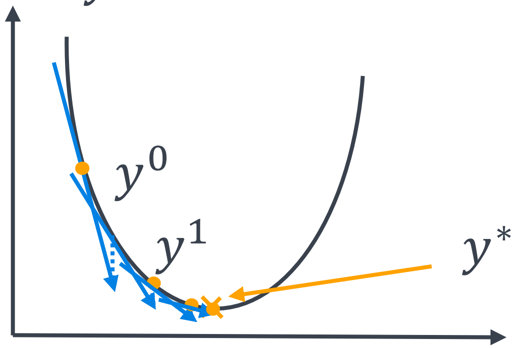
Algorithmes d’optimisation numérique

Vue d’ensemble

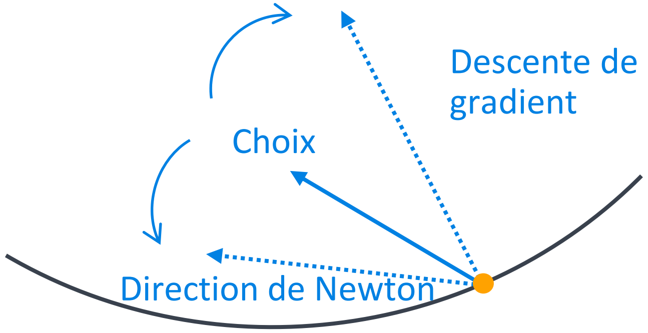
- **Nelder-Mead**
  À partir d'un ensemble initial de paramètres, la fonction cible est évaluée à chaque sommet d'un simplex (c'est-à-dire un triangle dans une dimension quelconque). Le sommet auquel le coût cible est le plus grand est remplacé (par réflexion / expansion / contraction) par un nouveau point, en espérant que le coût à ce point sera inférieur au précédent.



- **BFGS**
  L'algorithme BFGS appartient à la célèbre classe des méthodes quasi-Newtonienne. À partir d'une estimation initiale, l'algorithme choisit une direction dans laquelle la fonction cible décroît. Pour choisir cette direction, l'algorithme prend des informations à partir du gradient et d'une approximation de la matrice hessienne (c'est-à-dire les dérivées secondes) de la fonction de coût.



- **Levenberg-Marquardt**
  L'algorithme LM est conçu pour résoudre les problèmes de moindres carrés, mais peut être utilisé dans tout problème de minimisation. Il s'agit d'une combinaison de l'algorithme de Gauss-Newton et de l'algorithme de descente du gradient. Pour déterminer la direction de la descente, l'algorithme fait la distinction entre la situation où le point actuel est loin d'un minimum local, auquel cas l'algorithme se comporte comme un algorithme de descente de gradient standard, et le cas où le point actuel est proche d'un minimum local, auquel cas la direction suivante est déterminée en utilisant des informations supplémentaires provenant de la matrice jacobienne.



Algorithmes d’optimisation numérique

Comparaison

Algorithme	Avantages	Inconvénients
Nelder-Mead	▪ Peut traiter n'importe quelle fonction cible (pas d'hypothèse de régularité) ▪ Particulièrement efficace et robuste pour éviter les minima locaux ▪ Capacité à déterminer une solution même si l'algorithme est initialisé avec un point éloigné d'un minimum local	▪ Relativement long ▪ Peut échouer lorsque le minimum recherché est proche de la limite du domaine sur lequel la minimisation est effectuée (ou, lorsque ce domaine est complexe) ▪ Convergence lente lorsque la dimension (nombre de paramètres) augmente
BFGS	▪ Relativement rapide ▪ Bonne performance même pour les fonctions irrégulières ▪ L'efficacité et la précision peuvent être améliorées en utilisant le gradient analytique	▪ Plus adapté aux fonctions lisses (deux fois différentiables) ▪ Pas de garantie de convergence (sauf si la fonction cible a une forme spécifique) ▪ Multi-start souvent requis pour améliorer la robustesse
Levenberg-Marquardt	▪ Relativement rapide ▪ Capacité à déterminer une solution même si l'algorithme est initialisé avec un point éloigné d'un minimum local ▪ L'efficacité et la précision peuvent être améliorées en utilisant le gradient analytique	▪ Plus adapté aux fonctions lisses (deux fois différentiables). ▪ Pour les fonctions plates, l’algorithme peut se « perdre » dans l'espace des paramètres et ne pas converger ▪ Multi-start souvent requis pour améliorer la robustesse

Tables de scénarios économiques

Principe général

- Une table de scénarios économiques risque neutre contient **pour chaque simulation** et sur l'horizon de projection, les évolutions :
  - Des facteurs d'actualisation ou déflateurs ;
  - Des courbes des taux nominaux (aussi appelés taux sans risque) ;
  - Des indices action (avec et hors dividende) ;
  - Du taux de dividende action ;
  - …

- Qu'est ce qu'une table **market consistent** ?
  - Table permettant de retrouver les **prix de marchés** des actifs modélisés :
    - La table doit refléter les conditions économiques du moment :
      - Courbes des taux nominaux et volatilités implicites des différents drivers (indices action, taux).
    - La table est pourvue de **facteurs d'actualisation** (ou **déflateurs**) rendant **martingales les prix actualisés** (cf. infra) :
      - Un tel cadre théorique repose à la fois sur une hypothèse d'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) et de complétude du marché.

Tables de scénarios économiques

Exemple

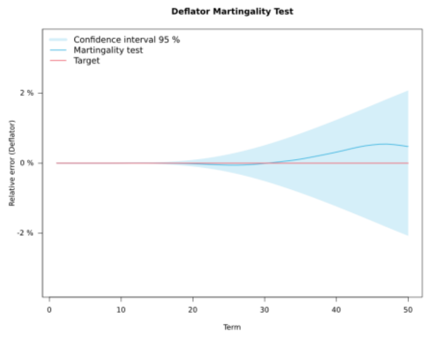
	SIMULATION	ECONOMY	CLASS	MEASURE	TERM	Y2013	Y2014	Y2015	Y2016	Y2017
Déflateurs	1	EUR	VALN	DEF	0	1	0,938718	0,482895	0,37104	0,331211
Prix des ZC nominaux	1	EUR	ZCB	PRICE	1	0,962226	0,962521	0,966356	0,970687	0,972911
	1	EUR	ZCB	PRICE	2	0,92648	0,925968	0,933091	0,941293	0,945494
	1	EUR	ZCB	PRICE	3	0,89163	0,890322	0,900345	0,91196	0,91791
	1	EUR	ZCB	PRICE	4	0,857651	0,855665	0,868206	0,882813	0,89029
	1	EUR	ZCB	PRICE	5	0,824615	0,822035	0,836746	0,853946	0,862763
	...					...				...
	1	EUR	ZCB	PRICE	28	0,321604	0,317286	0,33726	0,361805	0,374754
	1	EUR	ZCB	PRICE	29	0,308776	0,304557	0,324044	0,348016	0,36066
	1	EUR	ZCB	PRICE	30	0,296473	0,292354	0,311346	0,33473	0,347063
Prix des ZC réels	1	EUR	ILZCB	PRICE	1	0,976441	0,97801	0,980674	0,981538	0,982851
	1	EUR	ILZCB	PRICE	2	0,953355	0,956456	0,961497	0,963066	0,96552
	1	EUR	ILZCB	PRICE	3	0,930847	0,935287	0,942405	0,944557	0,948084
	1	EUR	ILZCB	PRICE	4	0,908857	0,914424	0,923365	0,926078	0,93064
	1	EUR	ILZCB	PRICE	5	0,887297	0,893822	0,904438	0,907714	0,913275
	...					...				...
	1	EUR	ILZCB	PRICE	28	0,542748	0,559491	0,585708	0,596404	0,612387
	1	EUR	ILZCB	PRICE	29	0,532381	0,54899	0,575058	0,585654	0,60153
	1	EUR	ILZCB	PRICE	30	0,522177	0,538645	0,564543	0,575035	0,590793
Taux dividende action	1	EUR	EQUITY	RNY_PC	0	2,54164	2,65054	0,865443	0,626716	0,69516
Indice action avec div.	1	EUR	EQUITY	RET_IDX	0	1	1,078132	1,672004	1,915461	2,032422
Indice action hors div.	1	EUR	EQUITY	GTH_IDX	0	1	1,050764	1,60084	1,81908	1,91592
Indice d'inflation	1	EUR	INFLN	INFLN_IDX	0	1	1,01047	1,032085	1,040525	1,046663

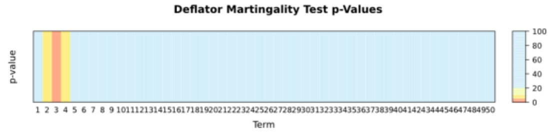
Tests de validation des scénarios risque-neutre

Vue d’ensemble des tests

Tests martingales

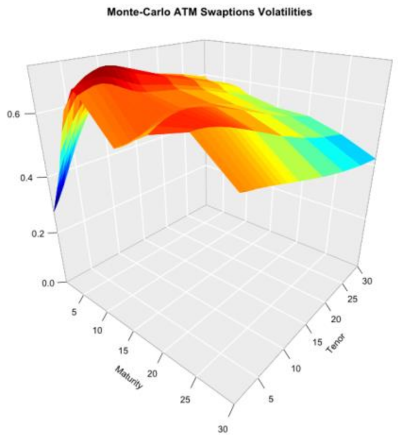
Etude de la market consistency des scénarios, en vérifiant la validité statistique de la propriété de martingalité des trajectoires risque-neutre

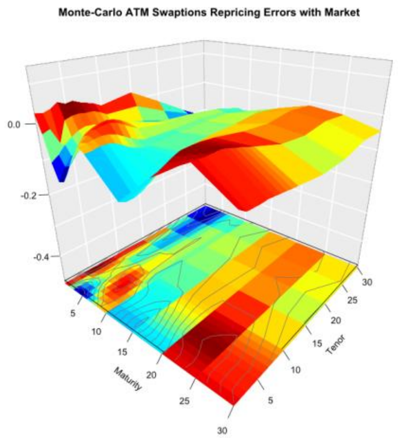




Tests de repricing

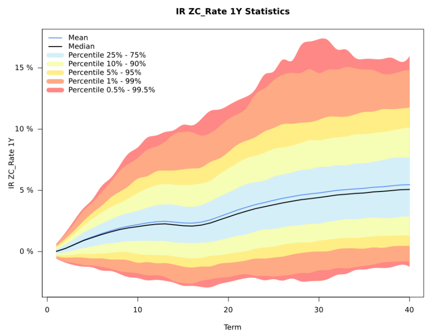
Etude de la market consistency des scénarios, en vérifiant la validité des formules de pricing des options utilisées dans le processus de calibrage

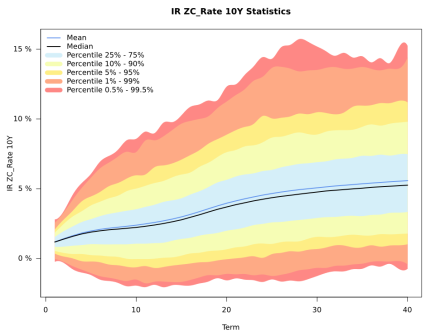




Statistiques descriptives

Analyse de la forme des trajectoires, de leur volatilité, de l'activation des payoffs des options afin d’identifier de potentielles valeurs aberrantes





Tests sur les corrélations

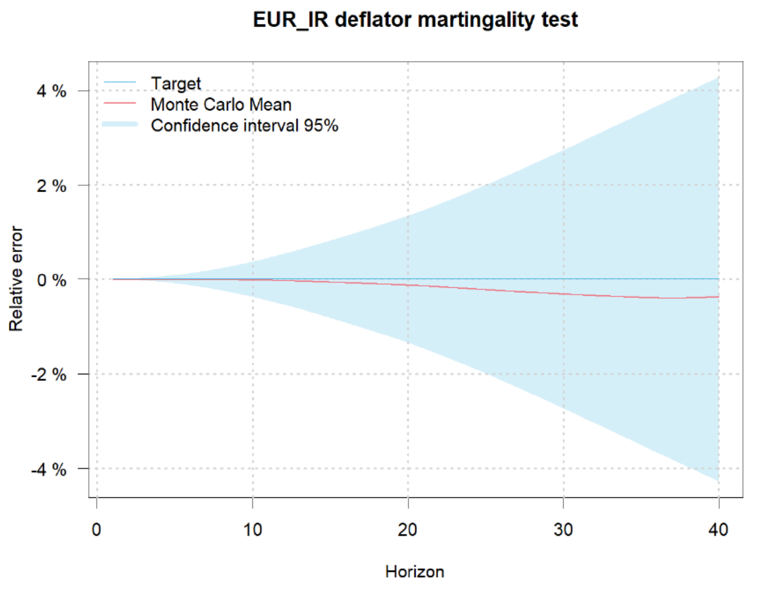
Vérification que les corrélations en sortie (par exemple entre les taux d'intérêt et les actions) sont conformes au cibles utilisées pour calibrer la matrice de corrélation du GSE

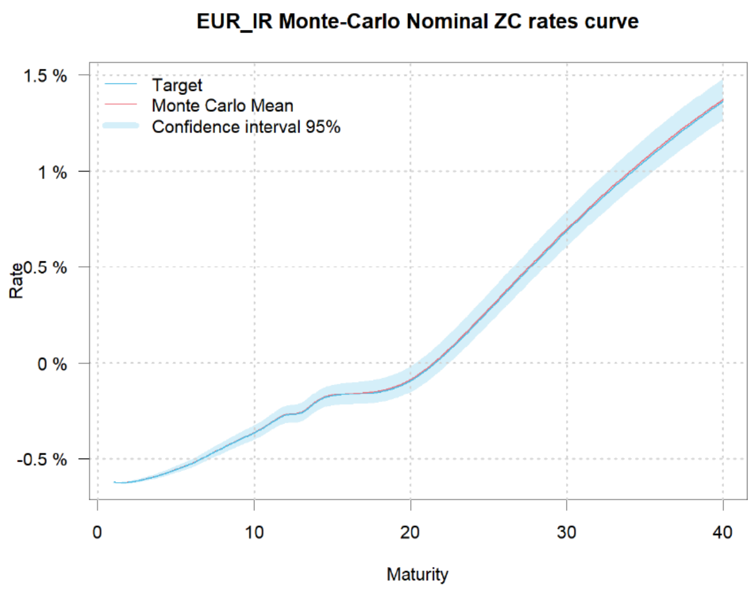
Tests martingales

Principe général

- Les tests martingales permettent de vérifier la cohérence mathématique des tables générées. Ils consistent à s'assurer que la **propriété de « martingalité »** de certaines quantités (par exemple, un indice action actualisé) se retrouve dans les simulations effectuées :
  - **Test déflateur** : analyse des écarts entre le prix zéro-coupon $P(0,t)$ et son estimé $\frac{1}{N}\sum_k \boldsymbol{D^k(t)}$
  - **Test Zéro-Coupon :** analyse des écarts entre le prix zéro-coupon $P(0,T)$ et son estimé $\frac{1}{N}\sum_k \boldsymbol{D^k(t)P^k(t,T)}$
  - Possibilité d'extraire également des **p-valeurs** (seuil à partir duquel la quantité cible appartient à l'intervalle de confiance associé)

Test martingale déflateur





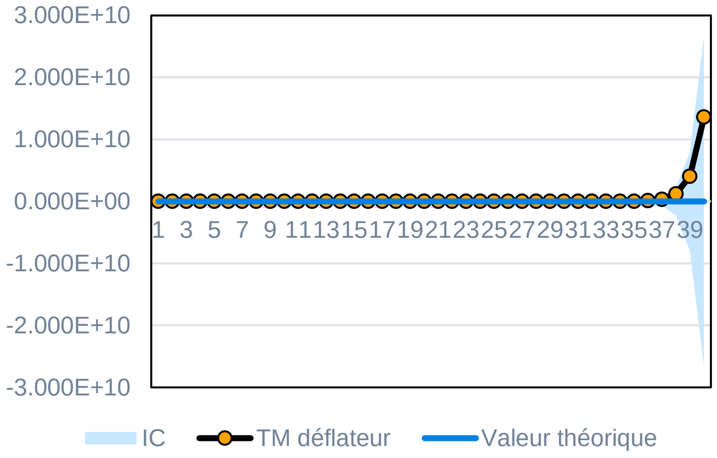
p-valeurs

Tests martingales

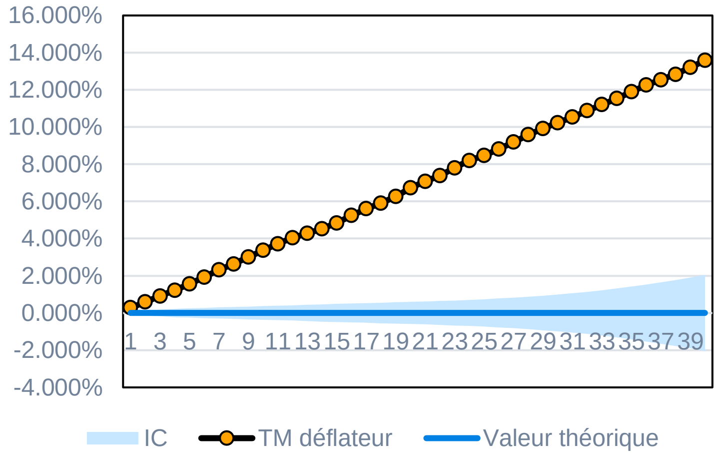
Eléments pouvant dégrader la martingalité

- L'erreur de martingalité intègre plusieurs composantes :
  - L'**erreur d'échantillonnage**. Elle peut être réduite en augmentant le nombre de simulations, ou en améliorant la vitesse de convergence des estimateurs de moyenne, en utilisant un générateur de nombre aléatoire alternatif ou en recourant à des techniques de réduction de variance
  - L'**erreur de discrétisation des modèles**. La simulation des modèles financiers repose souvent sur la discrétisation d'e.d.s. (equations différentielles stochastiques). Selon le pas de discrétisation et des valeurs des paramètres du modèle, l'erreur de discrétisation peut être importante. Elle peut être réduite en affinant le pas de temps. **Exemple** : *Illustration sur un modèle de crédit basé sur un processus CIR ne respectant pas la condition de Feller*

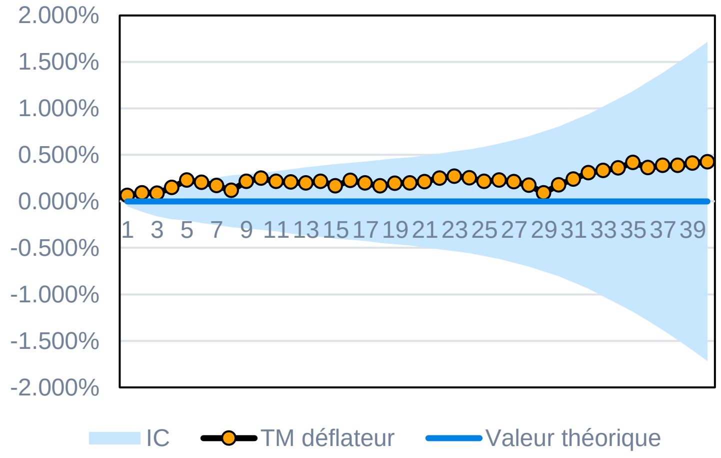
Test déflateur crédit pas de temps 1/12



Test déflateur crédit pas de temps 1/240



Test déflateur crédit pas de temps 1/12000



  - Les approximations de modélisation. Par exemple l'indice inflation peut être approximé comme le ratio des prix-zéro coupon réels et nominaux

Tests de repricing

Principe général

- Les **tests de repricing** permettent de vérifier la **cohérence économique** (*market consistency*) des tables générées. L’objectif est de s’assurer que les tables de scénarios économiques retranscrivent les données de marché utilisées dans le calibrage. Ces tests s’articulent en trois temps, par exemple pour les swaptions :

1 — **Calcul des prix de swaptions Monte Carlo (MC)**

Formule de pricing MC :

$$P^{MC}(0,\alpha,\beta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[D^k(T_\alpha)\left(S^k_{\alpha,\beta}(T_\alpha)-K\right)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta}\tau_i P^k(T_\alpha,T_i)\right]$$

2 — **Conversion en volatilités**

Exemple de conversion du prix MC ATM en vol. normale MC :

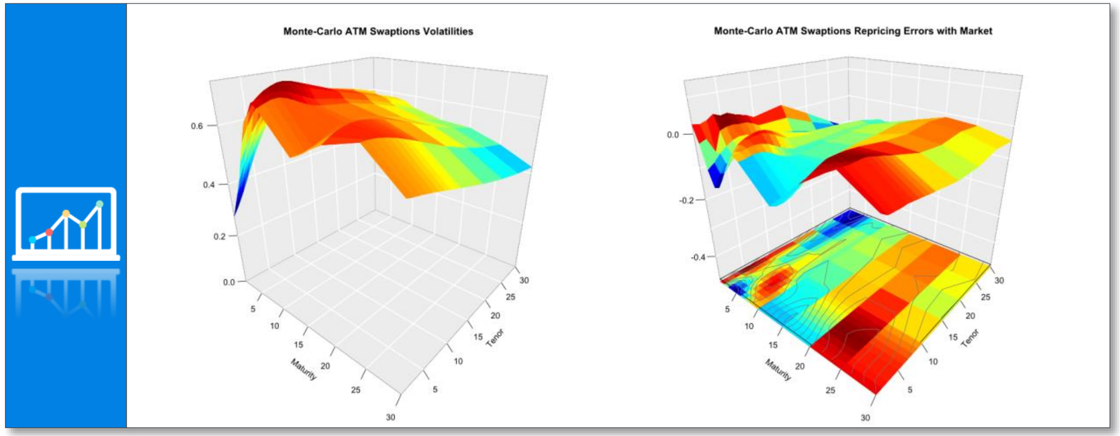
$$\sigma^{MC}{}_{normale}(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{2\pi}{T_\alpha}} \times \frac{P^{MC}(0,\alpha,\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}\tau_i P^k(T_\alpha,T_i)}$$

3 — **Comparaison avec les cotations de marché**

Par exemple, calculs des écarts absolus (en valeur absolue) entre les volatilités Monte Carlo et les volatilités de marché

$$\left|\sigma^{Mkt}_{normale}(\alpha,\beta,K) - \sigma^{MC}_{normale}(\alpha,\beta,K)\right|$$

- Les tests de repricing Monte-Carlo peuvent être effectués sur les dérivés considérés dans le processus de calibrage, comme les **swaptions ATM / OTM** :



Validation des corrélations

Principe général

- Les **tests sur les corrélations** consistent à estimer des corrélations entre des facteurs de risques observables (variations de taux, log-rendements action, …) simulés et à les comparer aux cibles historiques utilisées pour calibrer la matrice de corrélation du GSE :
  - Cette estimation peut être effectuée à un pas de temps précis (ex 10 ans) ou en moyenne sur l'ensemble de la projection
  - Les estimations peuvent être fournies avec un **intervalle de confiance** grâce à la **transformation de Fisher**. A noter que plusieurs sources d'erreur structurelles ne sont pas prises en compte par un tel IC :
    - Présence d'approximations dans les formules de calibrage des corrélations
    - Calibrage des corrélations à une date de projection donnée (ex 10 ans)
    - Retraitement de la matrice de corrélation du GSE afin qu'elle soit semi définie positive
  - A ce titre, pour les corrélations, un **seuil fixe d'acceptation** (ex 25%) peut être préféré à un IC

	Action	Immobilier	Taux 10Y
Action	100%	20%	10%
Immobilier	20%	100%	-10%
Taux 10Y	10%	-10%	100%

Corrélations cibles en inputs

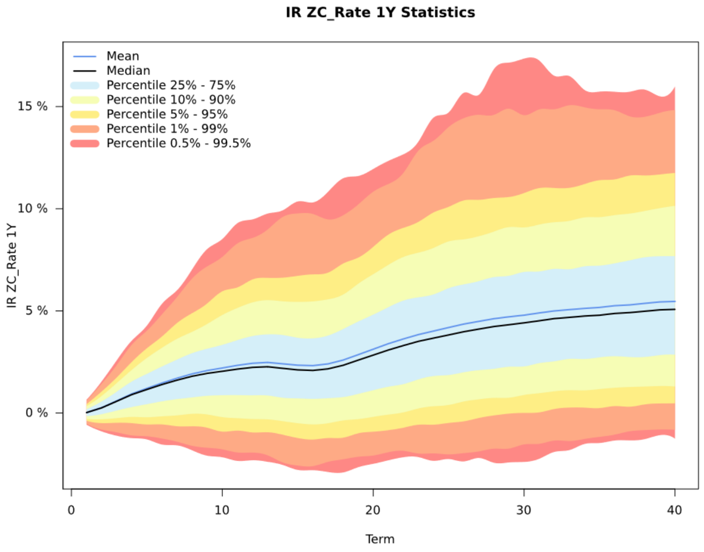
	Action	Immobilier	Taux 10Y
Action	100%	12%	9.7%
Immobilier	12%	100%	5%
Taux 10Y	9.7%	5%	100%

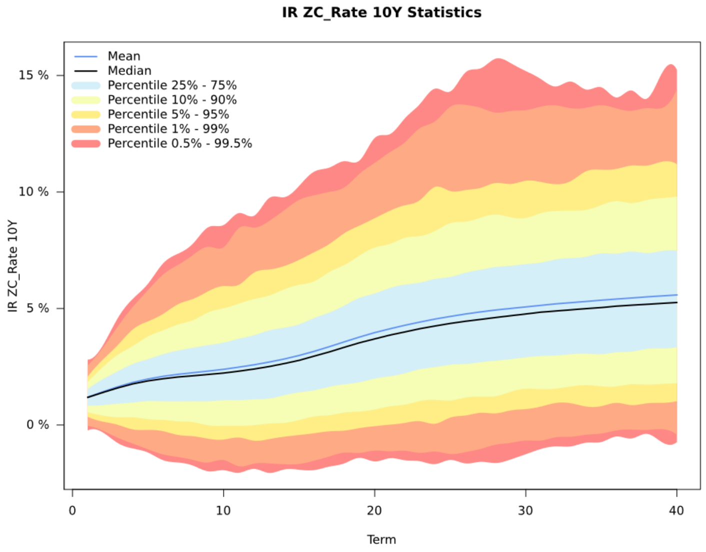
Corrélations estimées sur trajectoires

Statistiques descriptives

Principe général

- Il est possible d’étudier la forme des distributions des variables simulées, en particulier pour les taux d’intérêt
- Cette analyse est très utiles pour comprendre les **impacts ALM** associés à différents choix de modèles (sensibilité sur le shift du modèle DDLMM par exemple). Elle peut inclure :
  - L’analyse des **distributions de taux de référence** (1 an et 10 ans) : minimum, maximum, moyenne, volatilité, skewness, kurtosis et différents niveaux de quantiles





  - Le calcul des proportions de **trajectoires cappées** et / ou **floorées**
  - Le comptage des trajectoires **activant les payoffs** (pouvant être aussi inclus à l’analyse du repricing)