

Fascicule d'exercices, Mathématiques 3 - PCSI

Table des matières

Fiche 1 - Introduction aux groupes	2
Fiche 2 - Espaces vectoriels, applications linéaires	3
Fiche 3 - Matrices, déterminants	5
Fiche 4 - Systèmes d'équations linéaires	8
Fiche 5 - Réduction des endomorphismes	10
Fiche 6 - Produit scalaire, diagonalisation	14
Fiche 7 - Suites et séries numériques	17
Fiche 8 - Séries entières	20

Fiche 1 - Introduction aux groupes

Exercice 1. 1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de l'addition forme un groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Peut-on en dire autant pour $\mathbb{Z}$ muni de la multiplication $(\mathbb{Z}, \times)$?

Exercice 2. Parmi les paires $(G, \cdot)$ ci dessous, déterminer celles qui sont des groupes

- i) $\mathbb{Q}^*, x \cdot y = xy$;
- ii) $\{2^n | n \in \mathbb{Z}\}, x \cdot y = xy$;

Exercice 3. Soit l'ensemble G constitué d'un seul élément a c'est-à-dire $G = \{a\}$. On muni G d'une loi de composition interne $\star$ telle que $a \star a = a$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.

Exercice 4. Soit G un groupe dans lequel tout élément x vérifie $x^2 = e$ avec e l'élément neutre. Montrer que G est abélien (commutatif).

Exercice 5. Montrer que l'application exponentielle $\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un isomorphisme de groupes.
Qu'en est-il de l'application $\exp : (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$?

Exercice 6. Dans les questions suivantes, déterminer si la partie H est un sous-groupe du groupe G

- 1. $G = (\mathbb{Z}, +)$; $H = \{\text{nombres pairs}\}$.
- 2. $G = (\mathbb{Z}, +)$; $H = \{\text{nombres impairs}\}$.
- 3. $G = (\mathbb{R}, +)$; $H = [-1, +\infty[$.
- 4. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$; $H = \mathbb{Q}^*$.

Exercice 7. Dire si les parties suivantes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$

- 1. $H_1 = \{A \in GL_n(\mathbb{R}); A \text{ diagonale avec tous ses coefficients diagonaux non-nuls}\}$.
- 2. $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$ (ici, $n = 2$)
- 3. $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} ; a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$ (ici, $n = 2$)

Exercice 8. Soit G un groupe. Démontrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G

- 1. $C(G) = \{x \in G; \forall y \in G, xy = yx\}$.
- 2. $aHa^{-1} = \{aha^{-1}; h \in H\}$ avec $a \in G$ et H étant un sous-groupe de G .

————— **Les exercices ci-dessous sont facultatifs** —————

Exercice 9. Montrer que la loi suivante munie l'ensemble G indiqué d'une structure de groupe, et préciser s'il est abélien (commutatif) :

- 1. $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ sur $G =]-1, 1[$;

Exercice 10. Démontrer que les groupes multiplicatifs $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 11. Soit G un groupe cyclique et H un sous-groupe de G . Démontrer que H est cyclique.

Exercice 12. Soit G un groupe. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = y^{-1}$$

est une relation d'équivalence sur G .

Exercice 13. Considérons le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Soient n et m deux entiers naturels. On sait déjà (voir cours) que $n\mathbb{Z}$ et $m\mathbb{Z}$ sont des sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer que $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ si et seulement si n divise m .

Fiche 2 - Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 14. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}, \quad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}, \\ E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}.$$

Exercice 15.

1. Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$? Sont-ils générateurs de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base ?
2. Mêmes questions pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.
3. Mêmes questions pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ω un nombre réel non nul.

1. On définit $\vec{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\vec{u}(x) = \cos(\omega x)$ et $\vec{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\vec{v}(x) = \sin(\omega x)$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de E linéairement indépendants.
2. Soit F_ω le sous-espace vectoriel de E formé par les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. On admet que $\dim(F_\omega) = 2$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de F_ω .
3. On définit $\vec{w} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\vec{w}(x) = \cos(\omega x + a)$ et $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\vec{r}(x) = \sin(\omega x + a)$ où a est un réel fixé. Écrire $\vec{w}$ et $\vec{r}$ dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $\mathcal{C} = (\vec{w}, \vec{r})$ est une base de F_ω .
4. Exprimer la fonction $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les sous-ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}.$$

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et que $E \oplus F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 18. Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f . Quelle est sa dimension ?
3. En déduire le rang de f .

Exercice 19. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(\vec{e}_1) = 13\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = -8\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = -12\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3,$$

où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que $F_1 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $F_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercices supplémentaires

Exercice 20. Pour tous les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E :

- a) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$
- b) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$
- c) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$
- d) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$
- e) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$
- f) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ et } z = x\}$

Dans les cas où F est un sous-espace vectoriel de E , indiquer sa nature géométrique.

Exercice 21. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-ensemble de E des applications f qui vérifient $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit H l'ensemble des applications $x \mapsto ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 22.

1. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires l'un à l'autre (c'est-à-dire tels que pour tout réel λ , on ait $u \neq \lambda v$ et $v \neq \lambda u$). Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par u et v est égal à $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les familles $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ sont libres.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Déterminer une base de F .
3. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{W} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$. Déterminer une base de G .

Exercice 24. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a \in \mathbb{R}$) :

- a) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (y, x)$
- b) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x, a)$
- c) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (ax, ay)$
- d) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x + a, y + a)$
- e) $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto (x + z, y + z)$
- f) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \longmapsto (2x, 0, x - y)$
- g) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \sin x$

Exercice 25. On considère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3.$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que $f \circ f = f$.

Fiche 3 - Matrices, déterminants

Exercice 26. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins trois.

Exercice 27. On considère les matrices A, B, C, D définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A + B$, AB , AD , λA , $A - \lambda C$, où λ est un nombre réel quelconque.
2. Calculer $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$. A-t-on $\det(AB) = \det(BA)$?

Exercice 28. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

(donnés en composantes dans cette base).

1. Montrer de deux façons différentes que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.
2. En déduire que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Écrire un vecteur quelconque $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^2$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$. En déduire la matrice des composantes $M_{\mathcal{C}}(\vec{w})$ du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{C}$.
4. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{BC}}$ ainsi que la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{CB}}$.
5. Vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ (donc les matrices $P_{\mathcal{CB}}$ et $P_{\mathcal{BC}}$ sont inverses l'une de l'autre) et que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice 29. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés :

$$(a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y); \quad (b) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y).$$

Exercice 30. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y - z, x - 2z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercices supplémentaires

Exercice 31. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Calculer A^n pour tout entier n strictement positif.

Exercice 32. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (2x - z, -x + 3y + z, z).$$

1. Calculer $f(\vec{0})$, $f(1, 1, 1)$ et $f(1, 0, -1)$.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Calculer les images de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ par f où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 33. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est inversible alors son inverse est donné par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 34. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés :

$$(a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x + 7y, 2x - 5y); \quad (b) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

Exercice 35. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. On considère les endomorphismes $\frac{d}{dX}$ et $\frac{d^2}{dX^2}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ définis par

$$\frac{d}{dX}(P) = P', \quad \frac{d^2}{dX^2}(P) = P''.$$

Calculer la matrice des endomorphismes $\frac{d}{dX}$ et $\frac{d^2}{dX^2}$ dans la base $\mathcal{B}$. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?

Exercice 36. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ les deux applications linéaires définies, en coordonnées cartésiennes, par

$$f(x, y) = (2x + y, -y, x - 2y), \quad g(x, y, z) = (x - z, 2y).$$

1. Calculer les applications composées $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f \circ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
2. Trouver les matrices A et A' qui représentent f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Vérifier que les produits $A'A$ et AA' représentent les composés $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 37. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

1. Déterminer la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer f^{-1} et en déduire A^{-1} .
3. Est-ce que l'application f est un isomorphisme ?
4. Si on considère le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^2$, est-ce que l'application f est une isométrie ?

Exercice 38. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à A (par rapport à la base canonique). Soit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donnés en composantes dans la base canonique. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 39. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) est muni de la base canonique. Écrire les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique :

1. La rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$.
2. La rotation d'angle θ autour de Oz dans $\mathbb{R}^3$.
3. La réflexion par rapport à Ox dans $\mathbb{R}^2$.
4. La réflexion par rapport au plan xOy dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 40. Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{D}$) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{R}^2$).

1. Soit $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est :

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer une base de $\text{Ker}(L)$ et de $\text{Im}(L)$.

2. Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donné par la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$:

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer une base de $\text{Ker}(L)$ et de $\text{Im}(L)$.

Exercice 41. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Donner la matrice de l'endomorphisme L de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{B}$ qui est défini par : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $L(P)(X) = P(X-1)$.

Exercice 42. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $A(x)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 43. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le système $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.
3. Donner la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ et vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$.
4. Décomposer le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 44. (*Calcul de A^n*) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E . Soit L l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est donnée par :

$$A = L_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\text{Ker}(L)$ et $\text{Im}(L)$, sous-espaces de E et en donner une base. Quel est le rang de L ?
2. On note $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Montrer que $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ est une base de E . Préciser la matrice de passage $P = P_{BB'}$ de B à B' , ainsi que la matrice inverse P^{-1} .
3. Exprimer $L(\vec{e}'_1), L(\vec{e}'_2), L(\vec{e}'_3)$ dans la base B' et en déduire la matrice $D = L_{B'}$ de L dans la base B' .
4. Quelle relation lie les matrices A, D, P ?
5. Pour tout entier $n \geq 1$ exprimer la matrice A^n .

Fiche 4 - Systèmes d'équations linéaires

Exercice 45. On considère les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ y - z = 7 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture matricielle des systèmes (S_1) et (S_2) .
2. Déterminer les applications linéaires associées aux systèmes (S_1) et (S_2) .
3. Dire si (S_1) et (S_2) admettent des solutions (sans les calculer).

Exercice 46. Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

Exercice 47. Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, les systèmes :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z = \lambda \\ x + \lambda y + z = 1 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} (2 - \lambda)x + 2y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ 2y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 48. Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 49. Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :

$$(S) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Exercice 50. Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 + 2i \\ x_1 + (4 + i)x_2 = 3 + i \end{cases}$$

Exercice 51. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 3z = 0. \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x - 4y + 3z = 1. \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13. \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases} \end{array}$$

Exercice 52. En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de x dans les systèmes linéaires suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 5, \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ y = 3 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de y dans les systèmes linéaires suivants :

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x + 3y = 2, \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

Exercice 53. (Suite Exercice 4) Calculer les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \\ B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, & B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \\ C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, & C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}. \\ D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, & D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 54.

1. Déterminer pour quelles valeurs de a, b réelles le système suivant a une solution unique, n'a pas de solution, ou a une infinité de solutions :

$$\begin{cases} ax + 2y + az = 1 \\ ax + (a + 4)y + 3az = -2 \\ -ax - 2y + z = 1 \\ (a + 2)y + (3a + 1)z = b \end{cases}$$

2. Pour les systèmes homogènes suivants, indiquer s'ils ont une solution unique ou s'ils en ont une infinité, et dans le dernier cas indiquer la dimension de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 55. Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fiche 5 - Réduction des endomorphismes

Exercice 56. On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres des matrices A , B et C ?
2. Lesquelles de ces matrices sont diagonalisables ?

Exercice 57. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
2. Calculer les valeurs propres de A .
3. Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A .
4. Justifier pourquoi A est diagonalisable.
5. Expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A est représentée par une matrice diagonale D , ainsi qu'une matrice inversible P vérifiant $A = PDP^{-1}$.

Exercice 58. Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - 2z, 2y, y + z).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de f .
3. Montrer que f est diagonalisable et expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D , ainsi qu'une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 59. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Expliciter en fonction de n les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

Exercices supplémentaires

Exercice 60. (*Diagonalisation*) Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base Can est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de L est une matrice diagonale D que l'on précisera.
2. Donner les équations dans la base canonique de 3 plans vectoriels stables par L .

Exercice 61. Soit E un espace vectoriel réel et L un endomorphisme de V . On suppose que L possède une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si L est inversible, alors λ^{-1} est valeur propre de L^{-1} .

Exercice 62. Soit A une matrice 3×3 de valeurs propres 1, 2, 3 correspondant respectivement aux vecteurs propres $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. On suppose que

$$\vec{v} = \vec{b}_1 - 4\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3.$$

Calculer $A^5 \vec{v}$.

Exercice 63. Montrer que si A est une matrice diagonalisable, alors $\det(A)$ est égale au produit des valeurs propres de A .

Exercice 64. (*Application aux suites récurrentes*) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ formée par des vecteurs propres de A et préciser une matrice diagonale semblable à A .
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique Can de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1} .
3. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle déterminée par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

En remarquant que pour tout $n \geq 2$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et u_1 pour $n \geq 2$.

Exercice 65. Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, y).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de f .
3. Montrer que f est diagonalisable et expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D , ainsi qu'une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 66. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose $a = 0$.

- (a) Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A .
- (b) En déduire que A est diagonalisable.
- (c) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
- (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 67. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$f(x, y) := (x - y, y).$$

- 1. Déterminer les matrices A et A' de f dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B} = ((1, 2), (-1, -1))$.
- 2. Vérifier que le polynôme caractéristique P_A est le même que $P_{A'}$.
- 3. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- 4. Est-ce que f est diagonalisable? Si oui, diagonaliser f .

Exercice 68. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$f(1, 0) := (2, 0), \quad f(3, 1) = (0, 1).$$

- 1. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = ((1, 0), (3, 1))$.
- 2. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- 3. Diagonaliser f .

Exercice 69. (*Systèmes différentielles*) On considère le système différentiel suivant

$$(S) \begin{cases} x'(t) = 3tx(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) = 2x(t) + 3ty(t) + e^{-t} \end{cases}$$

- 1. Montrer qu'on peut écrire (S) sous la forme matricielle

$$X' = A(t)X + B(t)$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3t & 2 \\ 2 & 3t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

- 2. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la matrice $A(t)$ admet deux valeurs propres distinctes.
- 3. Déterminer une base de vecteurs propres de $A(t)$.
- 4. Montrer que le système différentiel (S) est équivalent au système

$$(S_1) \quad X'_1 = DX_1 + B_1(t)$$

où D est une matrice diagonale.

- 5. Résoudre le système (S_1) et en déduire les solutions de (S) .

Exercice 70. (*Systèmes différentielles*)

- 1. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

- 2. On considère le système d'équations différentielles couplées

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -5x_1 + 4x_2, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= x_1 - 8x_2, \end{aligned}$$

- (a) Déterminer les modes normaux (c'est-à-dire les vecteurs propres de la matrice associée au système).

- (b) Résoudre le système pour la condition initiale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ et $\frac{d}{dt}x_1(0) = \frac{d}{dt}x_2(0) = 0$.
Est-ce que la solution est périodique ? Si oui, donner sa période.

Exercice 71. (*Matrices complexes*) Diagonaliser, si c'est possible, les matrices complexes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1+2i \end{pmatrix}.$$

Exercice 72. (*Matrices complexes*) Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix},$$

où $j = e^{2\pi i/3}$, en précisant leur ordre de multiplicité (algébrique) [Rappel : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$].

Exercice 73. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A .
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n .

Exercice 74. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égale à n . Soit L l'endomorphisme de E défini par $L(P)(X) = (X-1)P'(X)$. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres.

Exercice 75. La matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Exercice 76. Diagonaliser la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fiche 6 - Produit scalaire, diagonalisation

Exercice 77. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soient $\vec{v} = (-3, 5, 8)$ et $\vec{w} = (1, -4, 9)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer les longueurs de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
2. Calculer l'angle non-orienté entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
3. Calculer le résultat de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite engendrée par $\vec{w}$.
4. Trouver une base orthonormée du plan engendré par les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
5. Trouver un vecteur orthogonal aux deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 78. Soient $\vec{v} = (1 + i, 1 - i)$ et $\vec{w} = (1 - i, 1 + i)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire canonique. Calculer le produit scalaire $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$ et les normes de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 79. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base constituée des vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 80. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F .
2. Déterminer la projection orthogonale p_F sur F .

Exercice 81. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 3, muni du produit scalaire

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$.

Exercice 82. Montrer que l'application $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2)$ par

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

définie un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 83. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice orthogonale O telle que OA^tO soit diagonale.

Exercice 84. On munit $\mathbb{C}^2$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire U telle que UAU^* soit diagonale.

Exercices supplémentaires

Exercice 85. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{C}an$ est une base orthonormée.
2. Montrer que la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ définie par

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right), u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

est une base orthonormée.

3. Calculer la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}an$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Vérifier que $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I$.

Exercice 86. Diagonaliser en base orthonormée les matrices symétriques suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 87. Soit P le plan dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par les points $(0, 0, 0)$, $(1, 2, -1)$ et $(2, 1, 1)$. Trouver une base orthonormée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ soit une base du plan P .

Exercice 88. Pour chacune des matrices symétriques suivantes, trouver une matrice orthogonale O telle que OA^tO soit diagonale.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 89. Calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 90. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Montrer que φ est un produit scalaire.

Exercice 91.

1. Montrer que l'application $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$B(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

définie un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ qui soit orthonormée par rapport à B .

2. Déterminer pour quelles valeurs réelles de a, b l'application $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante est un produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$

$$B(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3.$$

Exercice 92.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Montrer que pour toute fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\left(\int_a^b f(t) dt\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b (f(t))^2 dt.$$

Exercice 93. Soit A une matrice symétrique réelle de type $(2, 2)$. Si les valeurs propres de A sont 3, 4 et que $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 3, trouver un vecteur propre associé à 4. Trouver A et une racine carrée de A , c'est-à-dire une matrice B telle que $B^2 = A$.

Exercice 94. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle M|N \rangle = \text{Tr}(M^t N)$$

Soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 95. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P|Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

et soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

1. Transformer la base canonique $(1, X)$ de F en une base orthonormée.
2. Déterminer $p_F(R)$ où p_F est le projecteur orthogonal sur F et $R(X) = 3X^2 - 5X$.
3. Déterminer la matrice de p_F dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 96. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire U telle que UAU^* soit diagonale.

Exercice 97. Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 nulles sur le bord de D . Pour $f, g \in E$, on pose

$$\langle f|g \rangle = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy.$$

Montrer que c'est un produit scalaire.

Fiche 7 - Suites et séries numériques

Exercice 98. Déterminer si les suites suivantes sont convergentes ou non. Dans le cas où elles convergent donner la limite :

$$(1) \ u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}, \quad (2) \ u_n = \frac{n^2}{e^n}, \quad (3) \ u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}, \quad (4) \ u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{3^n}\right),$$

$$(5)^* \ u_n = n\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right), \quad (6)^* \ u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad a, b \text{ strictement positifs.}$$

Exercice 99. À l'aide du critère de d'Alembert ou du critère de Cauchy, déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$(1) \ u_n = \frac{2^n}{n!}, \quad (2) \ u_n = \left(\pi + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (3) \ u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n, \quad (4)^* \ u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 100. Déterminer la nature (convergence absolue, convergence, semi-convergence, divergence et divergence grossière) des séries $\sum u_n$ de termes généraux :

$$(1) \ u_n = q^n \text{ où } q > 0, \quad (2) \ u_n = n^{\alpha+1} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3) \ u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad (4)^* \ u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

$$(5)^* \ u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}, \quad (6)^{**} \ u_n = \int_0^{1/n^2} \sin(t) \, dt, \quad (7)^{**} \ u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}, \quad (8)^{**} \ u_n = \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}.$$

Exercice 101. ** Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(n-1)}$$

est-elle convergente ? Calculer sa somme lorsque $\alpha = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 102. Étudier les suites $(u_n)_n$ dont le terme général est donné par

$$(1) \ u_n = \frac{1}{2^n}, \quad (2) \ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (3) \ u_n = n^{1/n}, \quad (4) \ u_n = \frac{2^n}{n^2},$$

$$(5)^* \ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad (6)^* \ u_n = n \sin\left(\frac{2}{n}\right), \quad (7)^* \ u_n = \sqrt[n]{n+1}, \quad (8)^* \ u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pour celles qui convergent, donner la limite. Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$.

Exercice 103. Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}.$$

1. Montrer que (u_n) est strictement croissante et que (v_n) est strictement décroissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$.
3. Montrer que (u_n) converge vers e .
4. Montrer que (v_n) converge vers e .
5. * Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! \theta_n, 0 < \theta_n < 1 \text{ et } e = u_n + \frac{\theta_n}{n(n!)}.$$

6. ** Donner une valeur approchée par défaut de e à 10^{-4} près.
 7. ** Montrer que $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exercice 104. Étudier la nature des séries $\sum u_n$ de de termes généraux :

$$\begin{aligned} (1) \quad u_n &= \frac{1}{n(n+1)}, & (2) \quad u_n &= \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, & (3) \quad u_n &= (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), & (4) \quad u_n &= \frac{1}{3^n \ln n}, \\ (5)^* \quad u_n &= \frac{\ln n}{n}, & (6)^* \quad u_n &= \frac{\ln n}{n2^n}, & (7)^* \quad u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, & (8)^* \quad u_n &= (1+\sqrt{n})^{-n}, \\ (9)^* \quad u_n &= \frac{1}{4^n \ln(2+\frac{1}{n})}, & (10)^* \quad u_n &= \frac{1}{4^n \ln(1+\frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

Exercice 105. * Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-4)^\alpha}$$

est-elle convergente ? Calculer sa somme lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 106. * Étudier la convergence de la série numérique de terme général donné pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{\sqrt{n} + \sin(n)}{\ln(n+1) + n^3}.$$

Exercice 107. * Montrer que la série numérique suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Exercice 108. ** Calculer une valeur approchée à 10^{-2} de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 109. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On considère la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

2. * On note $(S_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que

$$S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x) dx.$$

3. * En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et que sa somme vaut $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx$.

4. ** Montrer, en choisissant judicieusement f , que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exercice 110. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On pose $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X-1)$ et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 2. Soit $Q(X) = X^2 + X + 1$. Calculer les composantes de Q dans la base $\mathcal{B}$.
 3. * Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!}.$$

Exercice 111. * Écrire le nombre rationnel $1,037037...037...$ sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers.

Exercice 112.

1. Donner la nature de la série $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$.
2. * Simplifier la somme partielle $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$ et en déduire la convergence de la suite

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$
3. ** En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}.$$

Exercice 113. ** En exprimant $u_n = \frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ comme somme de deux suites, déterminer selon les valeurs de α la nature de la série $\sum u_n$.

Fiche 8 - Séries entières

Exercice 114. Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1) \sum \frac{z^n}{n^2}, \quad (2) \sum \frac{(-1)^n}{2^n \sqrt{n}} z^n, \quad (3) \sum \frac{z^{3n}}{2^n}, \quad (4) \sum \frac{z^{n^2}}{n}.$$

Exercice 115. Exprimer la somme de chaque série entière réelle sur son intervalle de convergence que l'on précisera :

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n, \quad (3) \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \quad (4) \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1) x^{3n+2}.$$

Exercice 116. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{(n+1)^3 \ln(1 + \frac{1}{n})}, \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

2. Montrer que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n$.

Exercice 117. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R .

Exercices supplémentaires

Exercice 118. Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1) \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n, \quad (2) \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n, \quad (3) \sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n, \quad (4) \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1},$$

$$(5) \sum (-1)^n (n+3)! z^n, \quad (6) \sum n^n z^n, \quad (7) \sum \frac{(-2)^n}{n+1} z^n, \quad (8) \sum (1+i)^n z^n.$$

Exercice 119. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(1) \sum \frac{n^3 + 1}{3^n} x^n, \quad (2) \sum \frac{\ln n}{n^3} x^n, \quad (3) \sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n} x^n, \quad (4) \sum \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) x^n.$$

Exercice 120. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 121. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{pn}$.

Exercice 122. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3 + 4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 123. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n} x^n.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f .