Feuille d'exercices n° 1 – Interpolation polynomiale

Exercice 1. *Un exemple de polynôme d'interpolation*

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Déterminer le polynôme P_1 d'interpolation de Lagrange aux noeuds 0 et 1.
2. Déterminer le polynôme P_2 d'interpolation de Lagrange aux noeuds 0, 1/2 et 1. On l'écrira sous forme de Lagrange et sous forme de Newton.

Correction de l'exercice 1.

On rappelle que pour construire le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n de degré n de f sur $[x_0, x_n]$, aux nœuds $(x_1, \cdots, x_n)$, on note pour tout $x \in [x_0, x_n]$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

La forme de Lagrange du polynôme P_n est alors

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i,$$

où $y_i = f(x_i)$.

La forme de Newton consiste à écrire P_n sous la forme

$$P_n(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \lambda_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

1. On considère les points d'interpolation $(x_0 = 0, x_1 = 1)$. On a alors

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = 1 - x, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$

$$P_1(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = y_0(1 - x) + y_1 x.$$

2. **Forme de Lagrange.** On considère les points d'interpolation $(x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1)$. On a alors

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = (1 - x)(1 - 2x), \\ L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = 4x(1 - x), \\ L_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_2}\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = x(2x - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 \\ &= y_0(1 - x)(1 - 2x) + y_1 4x(1 - x) + y_2 x(2x - 1). \end{aligned}$$

Forme de Newton. Étant donné que $\dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)) = 3$ et $\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1)\}$ est une famille avec trois polynômes échelonnés en degré, on obtient immédiatement qu'ils existent des uniques valeurs

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels qu'on peut écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds x_0, x_1, x_2 sous la forme (de Newton) suivante :

$$P_2(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)(x - x_1).$$

En fait, on déjà connaît que les valeurs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ peuvent se calculer en utilisant la méthode des différences divisées, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= f[x_0] = f(x_0),\\
\lambda_1 &= f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\\
\lambda_2 &= f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0}.
\end{aligned}$$

On va rappeler cette méthode. On utilisera que P_2 est le seul polynôme de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tel que $P_2(x_0) = y_0$, $P_2(x_1) = y_1$, $P_2(x_2) = y_2$.

— *Étape 1* - Le polynôme P_2 vérifiant $P_2(x_0) = y_0$, on trouve l'équation

$$P_2(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow \lambda_0 = y_0 = f[x_0],$$

qui donne la valeur de λ_0.

— *Étape 2* - Le polynôme P_2 vérifiant $P_2(x_1) = y_1$, on trouve l'équation

$$P_2(x_1) = y_1 \Longleftrightarrow \underbrace{\lambda_0}_{=y_0} + \lambda_1(x_1 - x_0) = y_1.$$

Cela détermine la valeur de λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

— *Étape 3* - Finalement, le polynôme P_2 vérifiant $P_2(x_2) = y_2$, on trouve l'équation

$$P_2(x_2) = y_2 \Longleftrightarrow \underbrace{\lambda_0}_{=f[x_0]} + \underbrace{\lambda_1}_{=f[x_0,x_1]} (x_2 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2.$$

En soustrayant l'équation cette équation à celle de l'*Étape 2* on obtient :

$$\begin{array}{c}
\lambda_0 + \lambda_1(x - 1 - x_0) = y_1,\\[1em]
\lambda_0 + \lambda_1(x_2 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2,\\[1em]
\hline\\
\lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_1.
\end{array}$$

Alors, on trouve la valeur de λ_2

$$\lambda_2(x_2 - x_1) = f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \Longleftrightarrow \lambda_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2].$$

En appliquant les formules obtenues aux valeurs de l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= y_0,\\
\lambda_1 &= 2(y_1 - y_0),\\
\lambda_2 &= 2(y_2 - y_0) - 2(y_1 - y_0) = 2(y_0 - 2y_1 + y_2)
\end{aligned}$$

c'est à dire pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 + 2(y_1 - y_0)x + 2(y_0 - 2y_1 + y_2)x\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\\
&= y_0 + 2(y_1 - y_0)x + (y_0 - 2y_1 + y_2)x(2x - 1)
\end{aligned}$$

On peut vérifier, en écrivant par exemple les deux formes du polynôme de Lagrange dans sa base canonique, que les deux formes donnent bien le même polynôme.

Exercice 2. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\alpha \neq 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, tel que

$$\alpha P(0) + P'(0) = \alpha f(0) + f'(0) \quad \text{et} \quad P(1) = f(1).$$

2. Que se passe-t-il quand $\alpha = 1$?

Correction de l'exercice 2.

1. Le polynôme P est de degré 1, il s'écrit donc de la forme $P(x) = ax+b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors $P'(x) = a$.

   Notons les constantes $T_1 = \alpha f(0) + f'(0)$ et $T_2 = f(1)$. Les équations s'écrivent ainsi

$$\alpha b + a = T_1 \quad \text{et} \quad a + b = T_2.$$

   On note que si $\alpha \neq 1$, alors ce système linéaire a une seule solution (a,b). En fait, on obtient

$$b = \frac{T_1 - T_2}{\alpha - 1} \quad \text{et} \quad a = \frac{\alpha T_2 - T_1}{\alpha - 1}.$$

2. Si $\alpha = 1$, le système s'écrit

$$a + b = T_1 \quad \text{et} \quad a + b = T_2.$$

   Il y a alors deux possibilités :

   — si $T_1 \neq T_2$, le système n'admet pas de solution ;

   — si $T_1 = T_2 = T$, le système admet une infinité de solutions de la forme $a = r$ et $b = T - r$, pour $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. *D'après CC 2019*

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, tel que

$$P(-1) = f(-1), \quad P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = f(1).$$

   Indication : on pourra étudier l'application $\Phi : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4,\ P \mapsto (P(-1), P(0), P'(0), P(1))$.

2. Dans cette question, on veut estimer l'erreur commise en approchant f par P en tout point de l'intervalle $[-1,1]$. Pour cela, on suppose f de classe $\mathscr{C}^4$.

   Soit $x \in [-1,1] \setminus \{-1,0,1\}$. On suppose par exemple $x \in]0,1[$ (l'étude du cas $x \in]-1,0[$ est identique).

   On admet qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à 4, tel que

$$Q(-1) = f(-1), \quad Q(0) = f(0), \quad Q'(0) = f'(0), \quad Q(1) = f(1), \quad Q(x) = f(x).$$

   (La preuve est similaire à celle de la question 1.)

   (a) On pose $g : [-1,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - Q(t)$. Montrer qu'il existe $z_1 \in]-1,0[$, $z_2 \in]0,x[$ et $z_3 \in]x,1[$, tels que $g'(z_1) = 0$, $g'(z_2) = 0$ et $g'(z_3) = 0$.

   (b) Montrer que g' s'annule au moins 4 fois sur $[-1,1]$.

   (c) Montrer qu'il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que $g^{(4)}(\xi) = 0$.

(d) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [-1,1]$, on a $Q(t) - P(t) = c\pi(t)$, avec $\pi(t) = (t-1)(t+1)t^2$.

Montrer ensuite que $c = f^{(4)}(\xi)/4!$.

(e) En déduire l'estimation de l'erreur suivante :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\sup\limits_{t\in[-1,1]} |f^{(4)}(t)|}{4!}.$$

Correction de l'exercice 3.

1. On considère $\Phi : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4,\ P \mapsto (P(-1), P(0), P'(0), P(1))$.

   On remarque que Φ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ vers l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ (voir cours), et que $\dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. D'après le théorème du rang, pour montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}^4$, il suffit donc de montrer que le noyau de Φ est de dimension nulle.

   Pour cela, supposons qu'il existe $P \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ tel que $\Phi(P) = (0,0,0,0)$. Alors par définition de Φ, 0 est une racine double de P, et -1 et 1 sont deux autres racines. Nous avons donc affaire à un polynome de degré 3 non nul possédant 4 racines, ce qui est absurde. Donc, $\dim\ker\Phi = 0$.

   Ainsi, nous avons montré que Φ était un isomorphisme de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}^4$. Il y a donc existence et unicité du polynôme $P \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(P) = (f(-1), f(0), f'(0), f(1))$.

2. (a) On constate que $g(-1) = g(0) = g(x) = g(1) = 0$. f étant de classe $\mathscr{C}^4$ et Q étant un polynôme (donc de classe $\mathscr{C}^\infty$), g est de classe $\mathscr{C}^4$.

   En particulier, g est de classe $\mathscr{C}^1$. D'après le théorèmes de Rolle appliqué successivement aux intervalles $[-1,0]$, $[0,x]$ et $[x,1]$, il existe $z_1 \in]-1,0[$, $z_2 \in]0,x[$ et $z_3 \in]x,1[$ tels que $g'(z_1) = g'(z_2) = g'(z_3) = 0$.

   (b) D'après la question précédente, pour $x \in]0,1[$, g' s'annule une fois sur chacun des intervalles $]-1,0[$, $]0,x[$ et $]x,1[$.

   Par ailleurs, par définition de g, pour tout $t \in [-1,1]$, on a $g'(t) = f'(t) - Q'(t)$. On a donc $g'(0) = f'(0) - Q'(0) = 0$, donc g' s'annule également en $t = 0$, donc 4 fois au total.

   (c) On va appliquer le théorème de Rolle successivement aux dérivées supérieures de g jusqu'à l'ordre 4, puisque f est de classe $\mathscr{C}^4$.

   — D'après la question précédente, on a $g'(z_1) = g'(0) = g'(z_2) = g'(z_3) = 0$ avec $z_1 \in]-1,0[$, $z_2 \in]0,x[$ et $z_3 \in]x,1[$. D'après le théorème de Rolle appliqué successivement aux intervalles $[z_1,0]$, $[0,z_2]$ et $[z_2,z_3]$, g' étant de classe $\mathscr{C}^1$, il existe $\xi_1 \in]z_1,0[$, $\xi_2 \in]0,z_2[$ et $\xi_3 \in]z_2,z_3[$ tels que $g^{(2)}(\xi_1) = g^{(2)}(\xi_2) = g^{(2)}(\xi_3) = 0$.

   — D'après le théorème de Rolle appliqué successivement aux intervalles $[\xi_1,\xi_2]$ et $[\xi_2,\xi_3]$, $g^{(2)}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, il existe $\eta_1 \in]\xi_1,\xi_2[$ et $\eta_2 \in]\xi_2,\xi_3[$ tels que $g^{(3)}(\eta_1) = g^{(3)}(\eta_2) = 0$.

   — D'après le théorème de Rolle appliqué à l'intervalle $[\eta_1,\eta_2]$, $g^{(3)}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, il existe $\xi \in]\eta_1,\eta_2[$ tel que $g^{(4)}(\xi) = 0$.

   Finalement, on a montré qu'il existait $\xi \in]\eta_1,\eta_2[\subset [-1,1]$ tel que $g^{(4)}(\xi) = 0$.

   (d) — Q étant un polynôme de degré au plus 4, et P étant un polynôme de degré au plus 3, $Q - P$ est un polynôme de degré au plus 4.

On remarque que, par définition de P et Q, $Q-P$ s'annule en -1, 0 et 1. Pour tout $t \in [-1,1]$, on peut donc factoriser $Q(t)-P(t)$ par le polynôme $(t+1)t(t-1)$, c'est à dire qu'il existe R polynôme de degré au plus 1 tel que $Q(t)-P(t) = R(t)(t+1)t(t-1)$.

On remarque également que $Q'-P'$ s'annule en 0. Or pour tout $t \in [-1,1]$,

$$Q'(t)-P'(t) = R'(t)(t+1)t(t-1) + R(t)(3t^2-1).$$

On a donc $Q'(0)-P'(0) = -R(0) = 0$. Cela signifie que R est un polynôme de degré 1 qui s'annule 0, donc R s'écrit $R(t) = ct$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on a montré qu'il existe un coefficient $c \in \mathbb{R}$ tel que $Q(t)-P(t) = c\pi(t)$ avec $\pi(t) = (t+1)t^2(t-1) = t^4-t^2$.

— Montrons à présent que $c = f^{(4)}(\xi)/4!$.

Du fait que Q est de degré au plus 4 et P est de degré au plus 3, $(Q-P)^{(4)}$ est un polynôme constant et $(Q-P)^{(4)} = Q^{(4)} \equiv c\,24 = c\,4!$.

Or on a vu dans la question 1 qu'il existait $\xi \in [-1,1]$ tel que $g^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - Q^{(4)}(\xi) = 0$.

On en déduit que $f^{(4)}(\xi) = Q^{(4)}(\xi) = c\,4!$, donc $c = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$.

(e) — Si $x = -1$, 0 ou 1, on a $|f(x)-P(x)| = 0$.

— Si $x \in [-1,1]\backslash\{-1,0,1\}$, l'inégalité triangulaire donne

$$|f(x)-P(x)| \leq |f(x)-Q(x)| + |Q(x)-P(x)|.$$

Or $f(x) = Q(x)$ par définition de Q. D'après la question précédente, on a alors

$$|f(x)-P(x)| \leq |Q(x)-P(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}|\pi(x)|.$$

Or on peut déjà écrire que pour $\xi \in [-1,1]$, on a $|f^{(4)}(\xi)| \leq \sup_{t\in[-1,1]} |f^{(4)}(t)|$.

Reste à montrer que $|\pi(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [-1,1]$. Pour cela, il suffit de noter que $\pi(t) = t^4-t^2 = t^2(t^2-1)$ pour tout $t \in [-1,1]$. Les inégalités $0 \leq t^2 \leq 1$ et $-1 \leq t^2-1 \leq 0$ étant valides pour tout $t \in [-1,1]$, on obtient que $-1 \leq \pi(t) \leq 0$ pour tout $t \in [-1,1]$.

Remarque : une autre manière de faire, plus compliquée, est d'étudier la fonction $t \mapsto (t-1)t^2(t+1)$ *sur* $[-1,1]$. π *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *car polynomiale, et* $t \in [-1,1]$, $\pi'(t) = 2(2t^2-1)t$ *qui s'annule en* $t = -1/\sqrt{2}$, 0 *et* $t = 1/\sqrt{2}$.

t	1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$\pi'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\pi(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

On obtient que $|\pi(t)| \leq \frac{1}{4} \leq 1$ *pour tout* $t \in [-1,1]$.

Finalement, on a montré que pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$|f(x)-P(x)| \leq \frac{\sup_{t\in[-1,1]} |f^{(4)}(t)|}{4!}$$

Exercice 4. *D'après CC 2019*

On note $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds $-1, 0, 1$.
2. Soit $n \geq 4$ et $x_0, \dots, x_n$, $n+1$ points distincts dans l'intervalle $[-1, 1]$. Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux noeuds $x_0, \dots, x_n$.
3. Déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite de f aux noeuds $-1, 0, 1$.

Correction de l'exercice 4.

1. On considère les nœuds $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (donc $n = 2$). Pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrage $P_2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de f aux nœuds x_0, x_1, x_2, on remarque qu'on peut l'écrire sous deux formes différentes : Lagrange ou Newton. Dans cet exercice on rappel le calcul de toutes les deux formes, le résultat étant identique grâce à l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange.

   Forme de Lagrange : On calcule d'abord les polynômes de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés aux nœuds :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1) \times (-2)} = \frac{x(x-1)}{2}, \\
L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{1 \times (-1)} = (1 + x)(1 - x), \\
L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)x}{2 \times 1} = \frac{(x+1)x}{2}.
\end{aligned}$$

   Observons que $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Ainsi, le polynôme P_2 sous la forme de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\
&= 1 \times \frac{x(x-1)}{2} + 0 \times (1 + x)(1 - x) + 1 \times \frac{(x+1)x}{2} = x^2.
\end{aligned}$$

   En effet, on récupère les conditions $P_2(-1) = 1 = f(-1)$, $P_2(0) = 0 = f(0)$ et $P_2(1) = 1 = f(1)$.

   Forme de Newton : On commence en calculant les différences divisées :

$$\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0) = f(-1) = 1, \\
f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = -1, \\
f[x_1, x_2] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1, \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1.
\end{aligned}$$

   Alors, on obtient P_2 sous la forme de Newton :

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 + (-1) \times (x + 1) + 1 \times (x + 1)x = x^2,
\end{aligned}$$

   le résultat étant identique.

2. Pour $n \geq 4$, on remarque que l'on peut prendre $P_n(x) = f(x) = x^4$. En effet, $P_n(x) = x^4$ est un polynôme de $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ tel que $P_n(x_i) = x_i^4 = f(x_i)$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a donc $P_n = f$ sans aucun calcul.

3. Pour déterminer le polynôme d'interpolation d'Hermite $Q_2 \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ de f aux nœuds $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ il faut d'abord calculer les polynômes H_0, H_1, H_2 et $\hat{H}_0$, $\hat{H}_1$ et $\hat{H}_2$, qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} H_i(x) &= L_i(x)^2(1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)), \\ \hat{H}_i(x) &= L_i(x)^2(x - x_i), \end{aligned}$$

pour tout $i = 0, 1, 2$. On remarque que les polynômes de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés aux nœuds $-1, 0, 1$ ont été déjà calculés. En effet, on rappelle :

$$L_0(x) = \frac{x(x-1)}{2}, \quad L_1(x) = (1+x)(1-x), \quad L_2(x) = \frac{(x+1)x}{2}.$$

Ainsi, $L_0'(x) = x - \frac{1}{2}$, $L_1'(x) = -2x$ et $L_2'(x) = x + \frac{1}{2}$, donc $L_0'(-1) = -\frac{3}{2}$, $L_1'(0) = 0$ et $L_2'(1) = \frac{3}{2}$. Alors, on trouve les polynômes $H_i(x)$ et $\hat{H}_i(x)$:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= \left(\frac{x(x-1)}{2}\right)^2 (1 + 3(x+1)) = \frac{x^2(x-1)^2(4+3x)}{4}, \\ H_1(x) &= ((1+x)(1-x))^2\,(1 - 0 \times x) = (1-x)^2(1+x)^2, \\ H_2(x) &= \left(\frac{(x+1)x}{2}\right)^2 (1 - 3(x-1)) = \frac{(x+1)^2x^2(4-3x)}{4}, \\ \hat{H}_0(x) &= \left(\frac{x(x-1)}{2}\right)^2 (x+1) = \frac{x^2(x-1)^2(x+1)}{4}, \\ \hat{H}_1(x) &= ((1+x)(1-x))^2 x, \\ \hat{H}_2(x) &= \left(\frac{(x+1)x}{2}\right)^2 (x-1) = \frac{(x+1)^2x^2(x-1)}{4}. \end{aligned}$$

Observons que

$$f(-1) = 1, \quad f'(-1) = -4, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 4.$$

Alors, on connaît tous les éléments nécessaires pour calculer le polynôme d'interpolation d'Hermite

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= \underbrace{f(x_0)}_{=1} H_0(x) + \underbrace{f(x_1)}_{=0} H_1(x) + \underbrace{f(x_2)}_{=1} H_2(x) + \underbrace{f'(x_0)}_{=-4} \hat{H}_0(x) + \underbrace{f'(x_1)}_{=0} \hat{H}_1(x) + \underbrace{f'(x_2)}_{=4} \hat{H}_2(x_2) \\ &= (H_0(x) - 4\hat{H}_0(x)) + (H_2(x) + 4\hat{H}_2(x)). \end{aligned}$$

Pour simplifier

$$\begin{aligned} H_0(x) - 4\hat{H}_0(x) &= \frac{x^2(x-1)^2((4+3x) - 4(x+1))}{4} = -\frac{1}{4}x^3(x-1)^2, \\ H_2(x) + 4\hat{H}_2(x) &= \frac{(x+1)^2x^2((4-3x) + 4(x-1))}{4} = \frac{1}{4}x^3(x+1)^2. \end{aligned}$$

$$Q_2(x) = -\frac{1}{4}x^3(x-1)^2 + \frac{1}{4}x^3(x+1)^2 = \frac{1}{4}x^3(x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1) = x^4.$$

Remarquons que $Q_2 = f$. Ce résultat était prévisible car $f(x) = x^4$ est déjà un polynôme de degré 4 (donc il appartient à $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$). L'unicité du polynôme d'interpolation d'Hermite aurait suffit pour obtenir que $Q_2 = f$ sans aucun calcul.

Exercice 5. *Erreur d'interpolation.*

Soit a et b des réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x_0, ..., x_n$, $n+1$ points distincts dans l'intervalle $[a, b]$. On note L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0, ..., x_n$.

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

On note Π_n le polynôme défini par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Pi_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$.

Dans la suite, on note pour toute fonction $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, $\|u\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |u(x)|$.

1. Soit $x \in [a, b]$, $x \neq x_0, \ldots, x_n$.
   (a) Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - L_n(x) - \lambda\,\Pi_n(x) = 0$.
   (b) On note $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - L_n(t) - \lambda\,\Pi_n(t)$.
   Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.
   (c) En déduire qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $f(x) - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_n(x)$.
2. Justifier que $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$.
3. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}|\Pi_n(x)|$$

Correction de l'exercice 5.

1. On va admettre que les nœuds sont mis dans le bon ordre $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ et que $x \in [a, x_0[$ (la preuve pour les autres cas étant identique).
   (a) On définit l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange $Q_x = Q_x(t) \in \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ de f aux nœuds $x, x_0, \ldots, x_n$, c'est à dire, Q_x vérifie :

$$Q_x(x) = f(x), \quad Q_x(x_0) = f(x_0), \quad Q_x(x_1) = f(x_1) \quad \ldots \quad Q_x(x_n) = f(x_n).$$

   Observons que $Q_x - L_n \in \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ parce que $Q_x \in \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $L_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. De plus, les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ déterminent $n+1$ racines différentes de $Q_x - L_n$ (par définition des deux polynômes d'interpolation Q_x et L_n). Ainsi, il existe une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ constante telle que

$$Q_x(t) - L_n(t) = \lambda\Pi_n(t),$$

   pour tout $t \in [a, b]$, où $\Pi_n(t)$ est le polynôme définit dans l'énoncé. En particuler, si on choisit $t = x$ et on se rappelle que $Q_x(x) = f(x)$ (par définition de Q_x), on obtient que $f(x) - L_n(x) = \lambda\Pi_n(x)$.
   (b) La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et L_n et Π_n étant polynômes (donc de classe $\mathscr{C}^\infty$), on obtient que $g \in \mathscr{C}^{n+1}$. En outre, observons que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ déterminent $n+1$ racines différentes de g (par définition de L_n et Π_n), et le résultat antérieur vient de montrer que x est une autre racine. Donc, g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ avec $n+2$ racines différentes dans l'intervalle $[a, b]$. D'après le théorème de Rolle appliqué successivement aux intervalles $[x, x_0]$, $[x_0, x_1] \ldots [x_{n-1}, x_n]$ il existe $\eta_0 \in]x, x_0[$, $\eta_1 \in]x_1, x_2[, \ldots, \eta_n \in]x_{n-1}, x_n[$ tels que $g'(\eta_i) = 0$ pour tout $i = 0, \ldots, n$. C'est à dire, g' est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ avec $n+1$ racines différentes. Le même argument montre que $g^{(2)}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ avec n racines différentes. Par récurrence, on peut ainsi trouver la valeur ξ vérifiant la condition dans l'énoncé. En effet, admettons que $g^{(n)}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ avec 2 racines différentes $a < \xi_1 < \xi_2 < b$ (i.e., $g^{(n)}(\xi_1) = 0 = g^{(n)}(\xi_2)$). D'après le théorème de Rolle une dernière fois on trouve $\xi \in]\xi_1, \xi_2[\subseteq [a, b]$ tel que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.

(c) On calcule la dérivée d'ordre $n+1$ de g

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - L_n^{(n+1)}(t) - \lambda \Pi_n^{(n+1)}(t),$$

pour tout $t \in [a,b]$. Remarquons que L_n est un polynôme de degré n, donc $L_n^{(n+1)} \equiv 0$. En outre, par définition de Π_n il existe un polynôme $R_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ tel que $\Pi_n(t) = t^{n+1} + R_n(t)$. Donc,

$$\Pi_n^{(n+1)}(t) = (n+1)! + R_n^{(n+1)}(t),$$

pour tout $t \in [a,b]$. On remarque que R_n a degré n, ainsi $R_n^{(n+1)} \equiv 0$. Alors,

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda(n+1)!,$$

pour tout $t \in [a,b]$. En particulier, pour $t = \xi$ on trouve la relation

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \lambda(n+1)! \implies \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

2. Par définition, f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Donc $f^{(n+1)}$ existe et elle est continue. De plus, $[a,b]$ est un intervalle fermé et borné. Alors, $f^{(n+1)}$ doit être bornée d'après le théorème de Weierstrass (ou théorème des bornes).

3. D'après les questions précédentes, on a donc

$$|f(x) - L_n(x)| \leq |\lambda \Pi_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|\Pi_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}|\Pi_n(x)|,$$

avec $\|f^{(n+1)}\|_\infty \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. *Étude d'un cas particulier, convergence de l'interpolation de Lagrange*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et α un réel vérifiant $|\alpha| > 1$. On considère la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par : pour tout $x \in [-1,1]$,

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}$$

Dans la suite, on note pour toute fonction $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue, $\|u\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |u(x)|$.

1. *Interpolation de Lagrange sur l'intervalle* $[-1,1]$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x_0, ..., x_n$, $n+1$ points distincts dans l'intervalle $[-1,1]$. On note L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0, ..., x_n$. Dans cette question, on étudie la convergence uniforme de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur l'intervalle $[-1,1]$.

   On note Π_n le polynôme défini par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Pi_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$.

   Par le cours (voir aussi exercice 5), on sait que pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_n(x)$$

   (a) Montrer que $\|\Pi_n\|_\infty \leq 2^{n+1}$.

   (b) Calculer les dérivées successives de la fonction f puis montrer que

$$\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq \frac{(n+1)!}{(|\alpha| - 1)^{n+2}}$$

   On rappelle que pour tous réels a et b, $\Big||a| - |b|\Big| \leq |a - b|$.

(c) En déduire la majoration suivante :

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{2^{n+1}}{(|\alpha| - 1)^{n+2}}$$

puis donner une condition suffisante sur α permettant d'assurer que

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$$

2. *Interpolation par sous-intervalles.*

Soit $x \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq x_0, \dots, x_n$ $n + 1$ points équidistants dans l'intervalle $[-1, 1]$ avec $x_0 = -1$ et $x_n = 1$. On note $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que pour tout $0 \leq k \leq n$, $f_n(x_k) = f(x_k)$ et pour tout $0 \leq k \leq n - 1$, f_n est affine sur $[x_k, x_{k+1}]$.

(a) Donner une expression explicite des points $x_0, \dots, x_n$ et de la fonction f_n sur chaque sous-intervalle de la forme $[x_k, x_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq n - 1)$.

(b) En utilisant le résultat de l'exercice 5, montrer que pour tout $0 \leq k \leq n - 1$, tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} |(x - x_k)(x - x_{k+1})|$$

(c) En déduire que

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{(|\alpha| - 1)^3} \times \frac{1}{n^2}$$

puis que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Correction de l'exercice 6.

1. *Interpolation de Lagrange sur l'intervalle* $[-1, 1]$.

Tout d'abord, montrons que f est bien définie. Grâce à l'inégalité $||a| - |b|| \leq |a - b|$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on obtient une borne inférieure du dénominateur de f :

$$|x - \alpha| \geq |\alpha| - |x| \geq |\alpha| - 1 > 0,$$

pour tout $x \in [-1, 1]$. En particuler, le dénominateur ne s'annule jamais et f est une fonction bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans l'intervalle $[-1, 1]$.Ainsi, le calcul de l'erreur dans l'interpolation polynomiale de Lagrange dans l'exercice 5 peut s'appliquer pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)!} |\Pi_n(x)|,$$

pour tout $x \in [-1, 1]$, où Π_n est le polynôme défini dans l'énoncé.

(a) Observons que tous les nœuds $x_0, x_1, \dots, x_n$ appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$. Alors, $|x_k| \leq 1$ pour tout $k = 0, \dots, n$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in [-1, 1]$ et $k = 0, \dots, n$, on obtient

$$|x - x_k| \leq |x| + |x_k| \leq 1 + 1 = 2.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|\Pi_n(x)| = \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| = \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \leq \prod_{k=0}^{n} 2 = 2^{n+1},$$

d'où $\|\Pi_n\|_\infty \leq 2^{(n+1)}$.

(b) Rappelons que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc les dérivées $f^{(n)}$ existent pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons par récurrence que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-\alpha)^{n+1}},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les dérivées d'ordre 1 et 2 s'écrivent :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-\alpha)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x-\alpha)^3},$$

pour tout $x \in [-1, 1]$, donc la formule est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Si l'on suppose que la formule est vraie pour $k \in \mathbb{N}$, alors

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{(-1)^k k!}{(x-\alpha)^{k+1}}\right] = (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(x-\alpha)^{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(x-\alpha)^{k+2}},$$

pour tout $x \in [-1, 1]$, ce qui montre le résultat pour $k + 1$. D'après le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement, en utilisant le fait que, rappelé dans la question 1, pour tout $x \in [-1, 1]$

$$|x - \alpha| \geq |\alpha| - |x| \geq |\alpha| - 1 > 0,$$

on obtient la majoration

$$|f^{(n+1)}(x)| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-\alpha)^{n+2}}\right| \leq \frac{(n+1)!}{|x-\alpha|^{n+2}} \leq \frac{(n+1)!}{(|\alpha|-1)^{n+2}},$$

pour tout $x \in [-1, 1]$, où l'on a utilisé la même borne inférieure du dénominateur.

(c) D'une coté, on a déjà montré que $\|\Pi_n\|_\infty \leq 2^{n+1}$ et, de l'autre coté $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq \frac{(n+1)!}{(|\alpha|-1)^{n+2}}$. D'après l'estimation de l'erreur on obtient :

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\Pi_n\|_\infty \leq \frac{2^{n+1}}{(|\alpha|-1)^{n+2}} = \frac{1}{|\alpha|-1}\left(\frac{2}{|\alpha|-1}\right)^{n+2}.$$

Ainsi, pour que le membre à droit de l'inégalité précédente converge vers zéro lorsque $n \to \infty$, il est nécessaire et suffisant d'assurer que le terme $2/(|\alpha| - 1)$ soit plus petit que 1, i.e.

$$\frac{2}{|\alpha|-1} < 1 \iff |\alpha| > 3.$$

Finalement, si $|\alpha| > 3$, alors on a $\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$.

2. *Interpolation par sous-intervalles.*

(a) Étant donné que $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ sont équidistants, la longueur $x_{k+1} - x_k = h$ est fixée pour tout $k = 0, \ldots, n - 1$. De plus, en utilisant une somme télescopique on trouve que

$$2 = x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} h = nh.$$

Ainsi, $h = 2/n$. En outre, une nouvelle somme télescopique nous permet d'écrire

$$x_k = (x_k - x_{k-1}) + x_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1}(x_{i+1} - x_i) + x_0 = x_0 + kh,$$

pour tout $k = 0, \ldots, n$. Donc, $x_k = -1 + \frac{2k}{n}$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.

Rappelons que la fonction f_n est définie par morceaux :

$$f_n(x) = P_{k,1}(x), \quad \text{pour tout } x \in [x_k, x_{k+1}],$$

pour chaque $k = 0, \ldots, n-1$, où $P_{k,1} \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds x_k et x_{k+1}. C'est à dire, en utilisant la forme de Newton :

$$\begin{aligned}
P_{k,1}(x) &= f[x_k] + f[x_k - x_{k+1}](x - x_k) \\
&= f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \\
&= f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right) + \frac{f\left(-1 + \frac{2(k+1)}{n}\right) - f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right)}{\frac{2}{n}}(x + 1 - \frac{2k}{n}) \\
&= \frac{1}{\frac{2k}{n} - (\alpha+1)} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{\frac{2(k+1)}{n} - (\alpha+1)} - \frac{1}{\frac{2k}{n} - (\alpha+1)}\right)(x + 1 - \frac{2k}{n}) \\
&= \frac{n}{2k - n(\alpha+1)} + \frac{n}{(2(k+1) - n(\alpha+1))(2k - n(\alpha+1))}(2k - n(x+1)),
\end{aligned}$$

pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$ et chaque $k = 0, \ldots, n-1$.

(b) f étant de classe $\mathscr{C}^2$, le résultat de l'exercice 5 s'applique sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ et on obtient que

$$|f(x) - P_{k,1}(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2!}|(x - x_k)(x - x_{k+1})|,$$

pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$ et $k = 0, \ldots, n-1$. Car $f_n = P_{k,1}$ sur $[x_k, x_{k+1}]$, cela finit la preuve.

(c) Rappelons que $f''(x) = \frac{2}{(x-\alpha)^3}$ pour tout $x \in [-1, 1]$ et on récupère la même borne :

$$\|f''\|_\infty \leq \frac{2}{(|\alpha| - 1)^3}.$$

En outre, pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$ on peut borner le polynôme $|(x - x_k)(x - x_{k+1})|$ en utilisant le fait que le maximum de ce polynôme sur $[x_k, x_{k+1}]$ est atteint au milieu du segment, c'est à dire en $x = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
|(x - x_k)(x - x_{k+1})| &= (x_{k+1} - x)(x - x_k) \\
&\leq (x_{k+1} - \frac{x_k + x_{k+1}}{2})(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - x_k) \\
&\leq \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{4} = \frac{h^2}{4} = \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{2}{(|\alpha| - 1)^3 2!} \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(|\alpha| - 1)^3} \times \frac{1}{n^2},$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.

Exercice 7. *Interpolation polynomiale de Hermite*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, ..., x_n$, $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R},\ \ a < b)$ et f de classe $\mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Nous cherchons un polynôme H_n de degré minimal dont les valeurs et celles de sa dérivée coïncident avec celles de f et f' en ces $(n+1)$ points distincts :

$$(\star) \qquad \forall i = 0, ..., n,\ \ H_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{et } H_n'(x_i) = f'(x_i).$$

Nous rappelons les fonctions de base de l'interpolation $(L_i)_{0\le i\le n}$ de Lagrange introduites en cours : pour tout $i = 0, ..., n$, L_i est le polynôme de degré n tel que pour tout $j = 0, ..., n$, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$; il est donné par :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Nous allons montrer le résultat suivant :

Il existe un unique polynôme H_n de degré au plus $2n + 1$, vérifiant $(\star)$. Il s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\tilde{h}_i(x) \tag{1}$$

avec pour tout $i = 0, ..., n$,

$$h_i(x) = (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i))L_i^2(x), \quad \textit{et} \quad \tilde{h}_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x).$$

De plus, si $f \in \mathscr{C}^{2(n+1)}([a, b], \mathbb{R})$, alors pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - H_n(x)| \le \frac{\|f^{(2(n+1))}\|_\infty}{(2n + 2)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|^2$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme H_n de degré au plus $2n + 1$, vérifiant les conditions $(\star)$.
2. Montrer que pour tout $i, j = 0, ..., n$
$$h_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad h_i'(x_j) = 0, \quad \tilde{h}_i(x_j) = 0 \quad \tilde{h}_i'(x_j) = \delta_{i,j}$$
3. En déduire que H_n est donné par (1).
4. Dans la suite, on suppose que $f \in \mathscr{C}^{2(n+1)}([a, b], \mathbb{R})$. On note $\Pi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \prod_{k=0}^{n}(y - x_k)$.

   Soit $x \in [a, b]$ tel que $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$, on pose
$$Q : [a, b] \to \mathbb{R},\ y \mapsto Q(y) = f(y) - H_n(y) - \big(f(x) - H_n(x)\big)\frac{\Pi_n(y)^2}{\Pi_n(x)^2}.$$
   Montrer que $Q(x) = 0$, et que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $Q(x_i) = Q'(x_i) = 0$.

   En déduire que Q' s'annule en au moins $2n + 2$ points distincts.

   Montrer (en appliquant le théorème de Rolle) qu'il existe $\eta_x \in [a, b]$ tel que $Q^{(2n+2)}(\eta_x) = 0$.

   Conclure.

Exercice 8. *Splines cubiques*

Dans cet exercice, nous souhaitons interpoler une fonction $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ par une fonction cubique par morceaux. C'est que nous appelons une *spline cubique.*

Pour cela nous définissons $(x_i)_{0\le i\le n+1}$, qui déterminent une partition de l'intervalle $[a, b]$, avec $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$.

Nous appelons spline cubique, une fonction S vérifiant

1. $S \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$,
2. $S\ |_{[x_i,x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré 3 pour $i = 0, ..., n$.

Pour construire une telle approximation, nous cherchons à définir une spline S en fonction seulement de ses valeurs aux points x_i et de sa dérivée seconde en x_i.

1. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 défini sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ par ses valeurs $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P''(\alpha)$, $P''(\beta)$.
   (a) Montrer que
   $$\frac{P''(x) - P''(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{P''(\beta) - P''(\alpha)}{\beta - \alpha}\,.$$
   (b) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P'(x) = v + P''(\alpha)(x - \alpha) + \frac{P''(\beta) - P''(\alpha)}{2(\beta - \alpha)}(x - \alpha)^2\,.$$
   (c) Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P(x) = u + v(x - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2 + \frac{P''(\beta) - P''(\alpha)}{6(\beta - \alpha)}(x - \alpha)^3\,.$$
   (d) Déterminer u et v en fonction de $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P''(\alpha)$, $P''(\beta)$. En déduire que P est unique.
   (e) Montrer que
   $$P'(\beta) = \frac{P(\beta) - P(\alpha)}{\beta - \alpha} + \big(P''(\alpha) + 2P''(\beta)\big)\,\frac{\beta - \alpha}{6}\,.$$
2. On se propose de démontrer qu'il existe une unique spline cubique S interpolant f au sens suivant
   $$\left\{\begin{array}{lcl} S(x_i) & = & f(x_i), \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n+1 \\ S'(a) & = & f'(a), \quad S'(b) = f'(b). \end{array}\right.$$
   (a) En considérant le polynôme P de degré 3 tel que pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $S\,|_{[x_{i-1},x_i]}\,(x) = P(x)$, montrer que
   $$S'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \big(S''(x_{i-1}) + 2S''(x_i)\big)\,\frac{x_i - x_{i-1}}{6}$$
   (b) Montrer que
   $$\begin{aligned}\Big(S''(x_{i-1}) + 2S''(x_i)\Big)\frac{x_i - x_{i-1}}{6} &+ \big(S''(x_{i+1}) + 2S''(x_i)\big)\,\frac{x_{i+1} - x_i}{6} \\ &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\end{aligned}$$
   Indication : on pourra considérer le polynôme de Q de degré 3 tel que pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $S\,|_{[x_i,x_{i+1}]}\,(x) = Q(x)$ afin d'obtenir une autre égalité pour $S'(x_i)$.
   (c) Montrer que
   $$\big(2S''(x_0) + S''(x_1)\big)\,\frac{x_1 - x_0}{6} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f'(a)\,.$$
   (d) De même, déterminer $(2S''(x_n) + S''(x_{n+1}))$ en fonction de x_n, x_{n+1}, $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$ et $f'(b)$.
   (e) Montrer que le vecteur $S'' = (S''_0, \cdots S''_{n+1})$ où $S''_i = S''(x_i)$ pour $i = 0, \cdots, n+1$ est l'unique solution d'un système à $n+2$ équations. Conclure.

3. En prenant pour $i \in \{0, ..., n+1\}$ la fonction spline S_i telle que
   $$S_i(x_j) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{si } j \neq i, \\ 1, & \text{si } j = i. \end{array}\right.$$
   et $S'_i(a) = S'_i(b) = 0$, puis les splines S_a et S_b telles que $S_a(x_i) = S_b(x_i) = 0$, et $S'_a(a) = S'_b(b) = 1$ et $S'_b(a) = S'_a(b) = 0$, montrer qu'une fonction spline S interpolant f sur $[a, b]$ s'écrit
   $$S(x) = \sum_{j=0}^{n+1} f_j S_j(x) + \sum_{\alpha \in \{a,b\}} f'(\alpha) S_\alpha(x)\,.$$