Les régions dans un disque
Analyse didactique

Equipe DREAM

3 septembre 2020

Table des matières

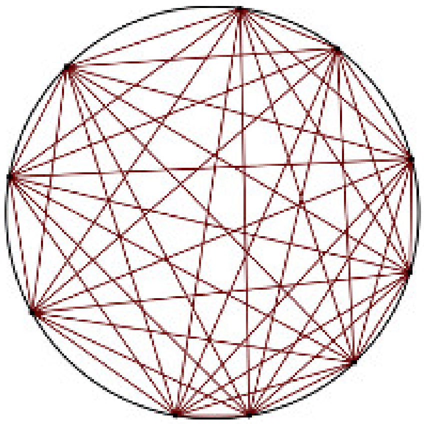

Figure 1: Un exemple avec 10 points

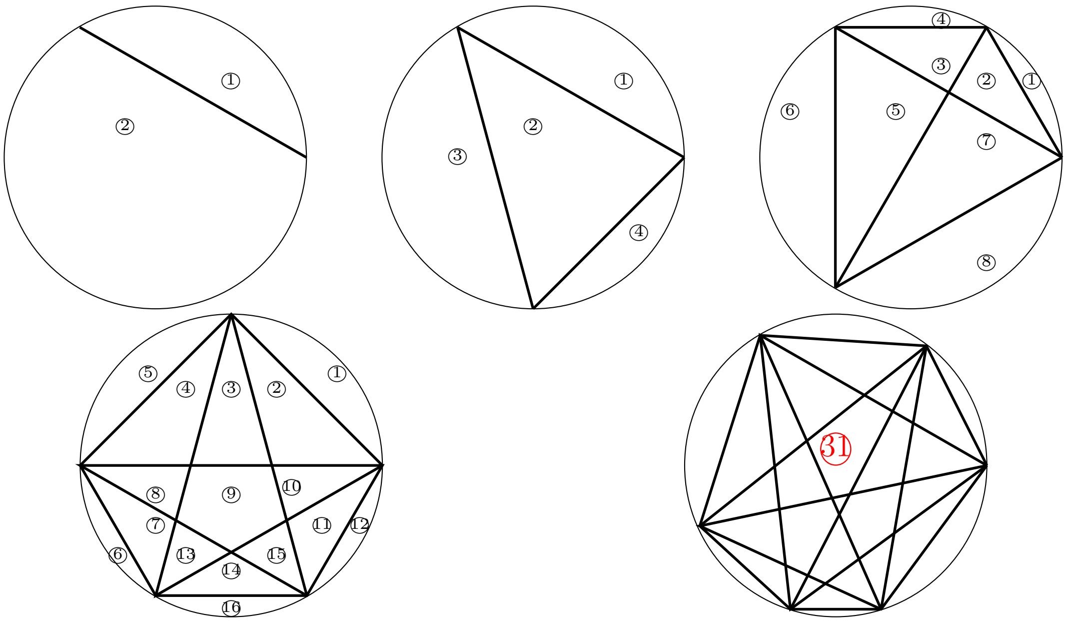

Figure 2: Le nombre de régions pour 2 à 6 points

1 Énoncé du problème

Combien de régions au maximum peuvent être délimitées dans le disque en construisant les cordes à partir de n points d'un cercle.

2 Variables de la situation

L'énoncé peut être modifié pour ne pas entrer directement dans la généralité de n points, mais plutôt guidé en demandant successivement le nombre de régions pour 2, 3, 4, 5 et 6 points. Le fait de demander ces réponses jusqu'à 6 est une variable importante puisque, dans ce dernier cas, la règle apparente liant le nombre de points au nombre de régions possibles est mise en défaut, comme on peut le voir sur la figure 2 dans le cas de 6 points.
Une expérience permet de conjecturer, mais aussi de réfuter une conjecture ; ce problème en est une excellente illustration ; la première expérience qui peut être réalisée est un comptage des

régions étape par étape comme on peut le voir sur la figure 2. Ainsi donner l'énoncé en incitant à aller jusqu'à 6 points induit la réfutation de la conjecture qui apparaît naturellement avec les premières expériences. En revanche, donner l'énoncé en demandant de chercher pour 2, 3, 4, $\ldots n$ points peut lancer les élèves dans une impasse s'ils essayent de démontrer que le nombre de régions est 2^n. C'est donc un choix important qu'il s'agit de faire en fonction des objectifs que l'on assigne à cette recherche de problème.
L'expérience mise en œuvre par un comptage des régions permet une réfutation d'une conjecture mais ne donne pas d'explication sur le résultat (surprenant) obtenu ; la phase d'observation se prolonge par une interrogation sur l'observation : il est alors possible de reprendre l'expérience en reliant chaque étape à un raisonnement combinatoire.
Au départ, il y a un point et une région : le disque entier. En rajoutant un point, on rajoute une arête qui rajoute donc une région (deux points : une arête, deux régions). En rajoutant un point, on peut construire 3 arêtes, comme le nombre de combinaisons de 2 parmi 3, chaque arête rajoutant une région : il y en a donc $1 + 3 = 4$. A cette étape, un raisonnement commence à se construire : compter les régions revient à compter les arêtes, c'est à dire compter les combinaisons de 2 parmi n points. Cependant, l'étape suivante montre encore l'insuffisance de ce raisonnement lié à l'intersection possible des arêtes : chaque fois que deux arêtes se coupent, il y a une région de plus ; il suffit alors de noter qu'il existe autant de points d'intersections que de quadrilatères, comptés comme le nombre de combinaisons de 4 parmi n, qui permet alors de faire apparaître une formule générale donnant le nombre de régions en fonction du nombre de points (Nb_n) :

$$Nb_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + 1$$

3 Connaissances et capacités en jeu

Un minimum de connaissances de combinatoire sont nécessaires pour résoudre le problème, notamment les combinaisons qui s'avèrent un outil puissant pour le dénombrement comme le montre bon nombre de solutions données dans la partie mathématique. Mais le problème peut aussi être vu comme une introduction à ce concept de dénombrement et la progressivité des expériences peut amener à la généralisation pour par exemple déterminer le nombre de cordes pour n points.

4 Procédure(s) élèves

Ce problème a été testé et observé dans des classes de première scientifique mais aussi avec des professeurs stagiaires de mathématiques. D'une façon générale, ce problème incite à expérimenter, à se faire une idée du résultat, ce qui s'est passé aussi bien avec les élèves qu'avec les professeurs. Même lorsque le résultat (faux) des puissances de 2 arrive, les élèves cherchent une raison de ce résultat en essayant de se ramener à des connaissances stabilisées comme par exemple sur les affiches proposées en figure 3 : une suite arithmétique pour les élèves de première, un polynôme de degré 6 pour les professeurs stagiaires. Il est à noter que cette référence à des connaissances stabilisées ou en lien avec les apprentissages récents apparaît souvent tant chez les néo-enseignants que chez les élèves. Ainsi par exemple, un groupe de première S a essayé de tracer la courbe en s'appuyant sur les résultats pour 2 à 6 points et de trouver une fonction passant par ces cinq points. Même si le raisonnement n'est pas mené à terme, il est intéressant de s'appuyer sur cette recherche pour par exemple parler des polynomes de Lagrange (Voir partie mathématique).

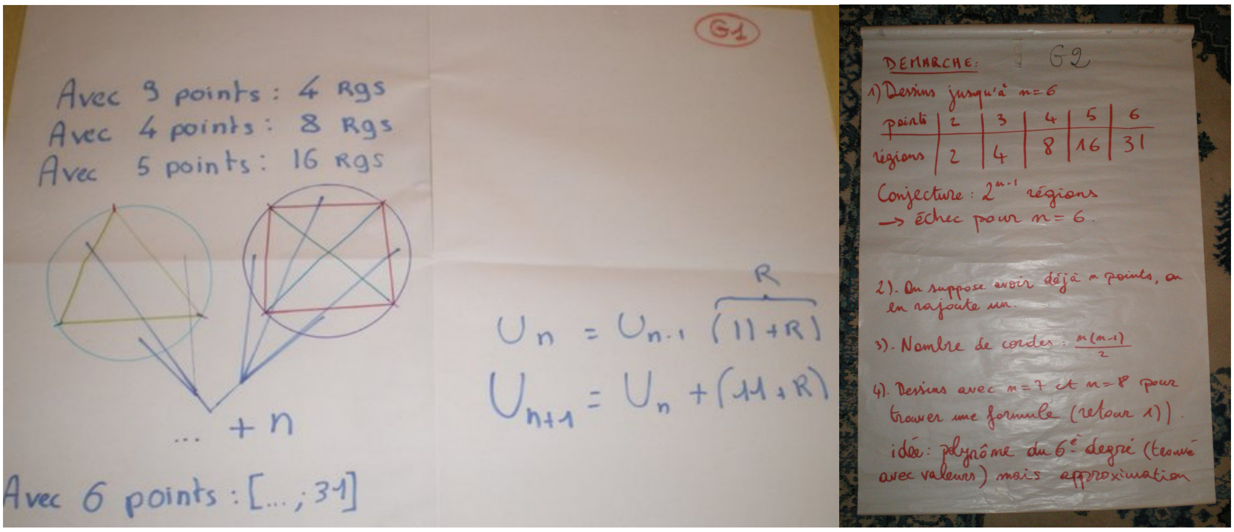

Figure 3: Mettre l'expérience en relation avec des connaissances. A gauche, première S, à droite, professeurs stagiaires

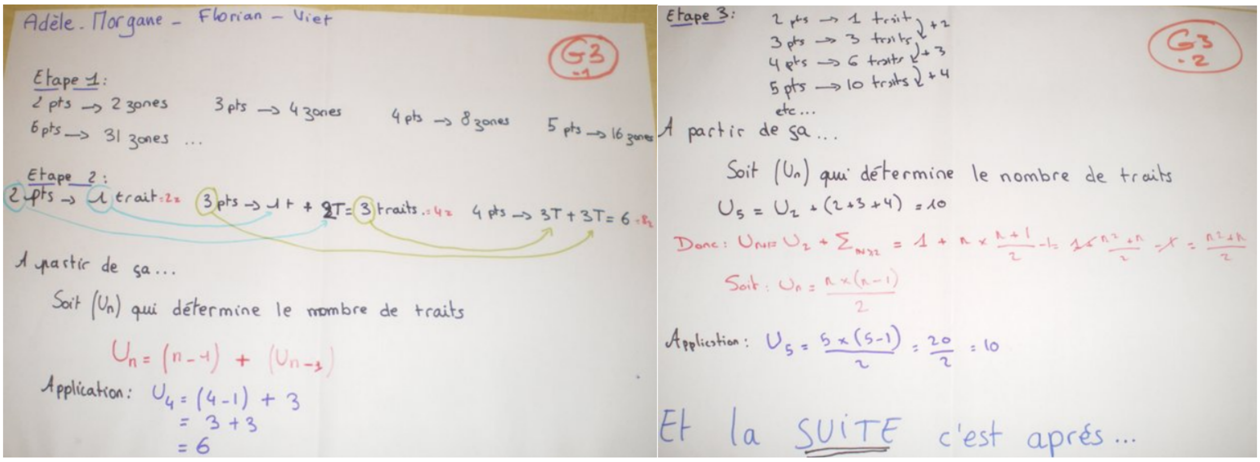

Figure 4: Exploration d'une partie du problème

Une autre attitude souvent repérée est de se concentrer sur l'explication d'un résultat sur un exemple ; par exemple, ce groupe de première S qui vérifie et rédige son raisonnement pour déterminer le nombre de cordes pour n=5 (Voir figure 4). Le raisonnement apparaît comme une raisonnement générique sur un exemple d'un sous problème du problème donné. Les élèves sont bien conscients que la réponse à la question posée n'est pas donnée (« et la suite c'est après ») ; ils espèrent que la détermination du nombre de cordes sera utile pour déterminer le nombre de régions.
Une procédure souvent repérée est d'amorcer un raisonnement sur les différences finies (ce qui peut effectivement s'avérer une bonne stratégie). Ainsi le groupe de première S dont l'affiche estt présentée en figure 5 tentent de mettre en évidence les résultats en utilisant cette technique.

5 Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)

Il est parfois difficile de compter le nombre de régions déterminées par les cordes reliant un nombre de points importants. Parfois, le résultat 31 pour 6 points est interprété comme une erreur de comptage et le (plus sympathique) résultat 32 lui est subrepticement substitué ! La

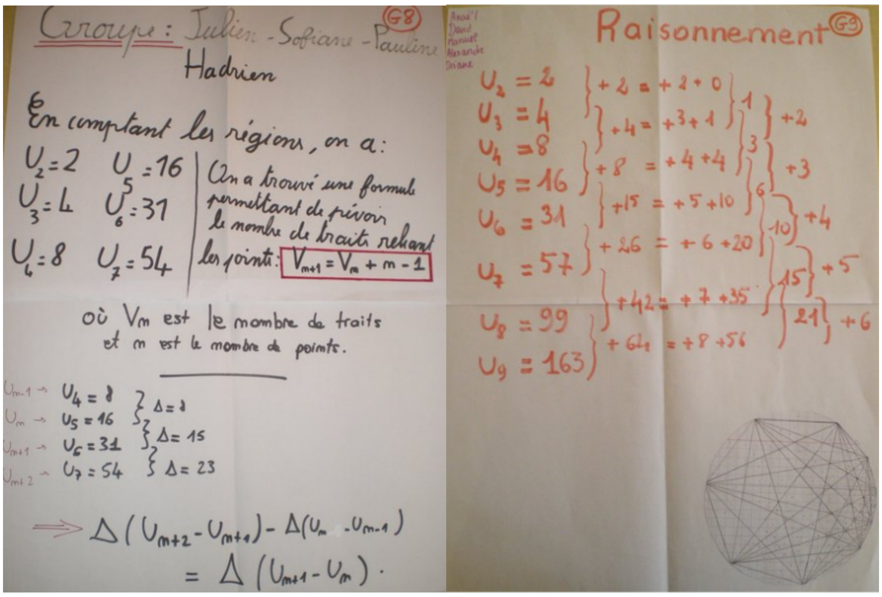

FIGURE 5: Différences finies

confrontation des résultats des différents groupes est ainsi nécessaire pour que tous les élèves partent sur une base de recherche stabilisée. Pour 7 ou 8 points, *a fortiori*, le comptage pose problèmes et est peu souvent exact ! Ce qui, cependant, est aussi intéressant puisque la demande d'un calcul plus théorique remplaçant le seul comptage devient pertinent pour les élèves. Parfois, un travail très minutieux permet un dessin et un comptage des régions comme ça a été le cas pour cet élève qui dans le groupe qui a réalisé l'image présente dans l'énoncé figure 5. Le danger est pour certains élèves de rester sur une tâche minutieuse de dessin et de comptage sans jamais dépasser ce stade. Encore une fois, l'expérience n'a de sens que lorsque ses résultats sont analysés et permettent d'alimenter un raisonnement.
Les élèves peuvent être un peu déconcertés devant ce problème du fait du peu de bagage mathématique à leur disposition *a priori*. Plusieurs réactions sont alors observables : revenir à des connaissances maitrisées (c'est le cas des groupes de la figure 3), mais c'est aussi le cas d'élèves qui dérivent vers des idées de mesure de surface comme ce groupe qui affirmait le nombre de régions tendaient vers 0 quand le nombre de points tendait vers l'infini en confondant le nombre de région et l'aire de ces régions ; ou bien encore limiter l'investigation à une partie qu'ils pensent maîtriser (figure 4).