

Les segments

Équipe DREAM

14 juillet 2020

Table des matières

1	Énoncé du problème	2
2	Variantes	2
3	Choix du problème	2
3.1	Compétences transversales	2
3.2	Connaissances mathématiques	2
4	Analyse mathématique du problème	3
5	Analyse de productions	3

1 Énoncé du problème

Étant donnés quelques points placés sur une feuille, donne une méthode pour savoir combien on peut tracer de segments différents joignant deux quelconques de ces points.

Tu pourras commencer par des petits nombres de points (2 ; 3 ; 4 . . .) ensuite pour 20, pour 108 et même pour un nombre de ton choix très grand.

2 Variantes

- On peut introduire la lettre dans l'énoncé à la place « d'un nombre de ton choix très grand » ce qui peut poser le problème du sens de la lettre en algèbre.
- On peut présenter le problème avec un tableau tel que :

Si j'ai . . .	Je peux tracer au plus . . .
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	6 segments
5 points	
6 points	
7 points	
12 points	
20 points	
108 points	
n points (n est un entier positif)	

Le risque avec un tel tableau est que les élèves peuvent avoir le sentiment d'avoir réalisé le travail demandé en se contentant de remplir les cases de la deuxième colonne.

3 Choix du problème

3.1 Compétences transversales

- Découvrir la recherche mathématique (utilisation de dessins, couleurs . . .)
- Mettre en place une technique de dénombrement : se rendre compte de l'efficacité d'un raisonnement, d'une procédure par rapport à un simple comptage « à la main ».

3.2 Connaissances mathématiques

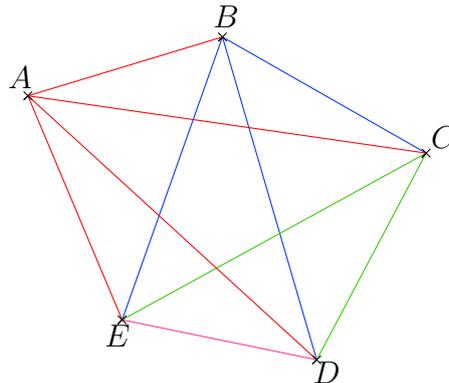
- C'est un premier sujet dont la consigne est simple : les élèves peuvent se plonger facilement dans la recherche sans être bloqués.
- Le sujet ne fait appel à aucun point du programme de 4^{ème} : cet exercice crée un changement avec les exercices auxquels sont habitués les élèves et de plus ils n'ont besoin d'aucun contenu particulier.
- Il leur est possible de faire des figures simples qui ne demandent pas de technicité particulière.
- Ce sujet peut amener à l'élaboration d'une formule :

- par l'utilisation éventuelle de la notion de suite ;
- par l'utilisation de la formule permettant de calculer la somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4 Analyse mathématique du problème

Première solution :



- Pour 5 points : remarquer qu'avec le premier point on peut tracer 4 segments, avec le deuxième point on peut tracer 3 segments, avec le troisième point on peut tracer 2 segments, avec le quatrième point on peut tracer un dernier segment. Ceci revient à additionner les nombres de 1 à 4.
- Pour n points : il faut donc additionner les nombres de 1 à $n - 1$ ce qui est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Deuxième solution :

On peut résoudre ce problème en raisonnant avec les nombres : sur quelques dessins comportant peu de points on peut trouver le nombre de segments à tracer et remarquer qu'on ajoute successivement 1, 2, 3, 4 ... au résultat précédent.

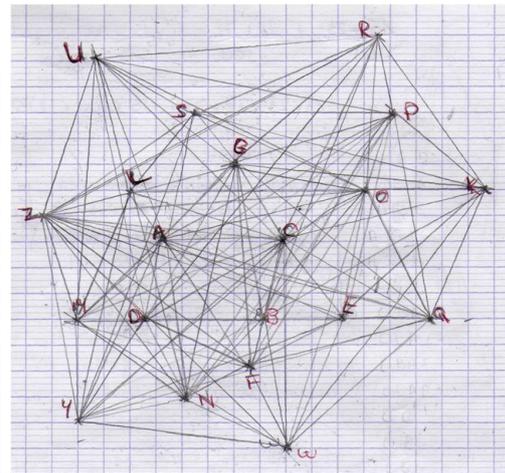
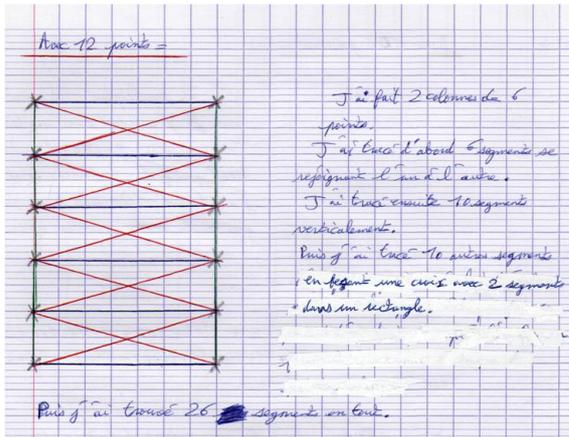
Troisième solution :

On peut déterminer le nombre de segments par récurrence en remarquant qu'ajouter un point revient à ajouter un certain nombre de segments. On obtient ainsi la formule de récurrence suivante :

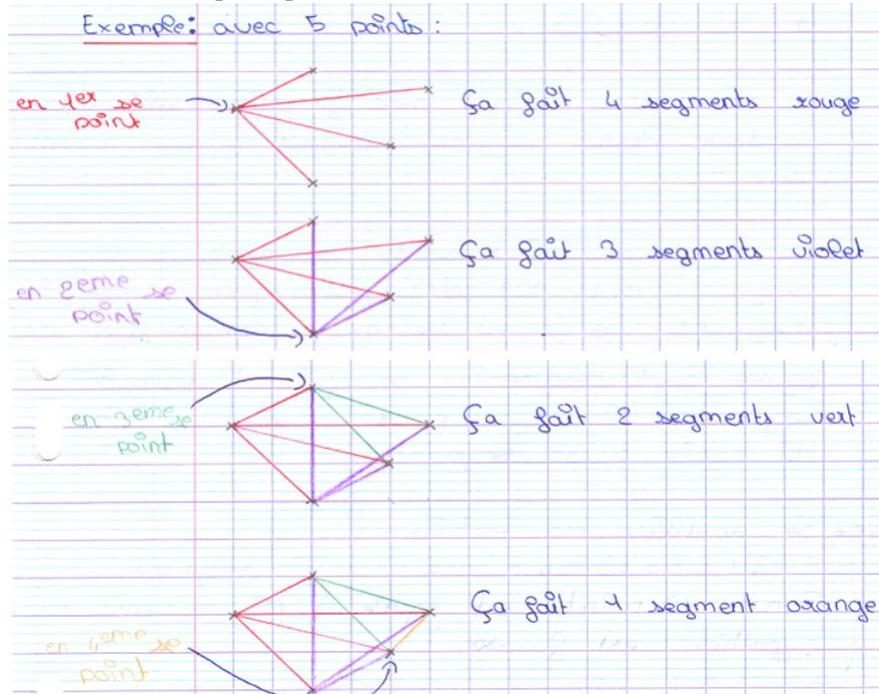
$$U_n = U_{n-1} + (n - 1) \text{ avec } U_1 = 0 \text{ et } U_2 = 1$$

5 Analyse de productions

- Les élèves peuvent être gênés par la disposition des points : certains vont aligner des points et ainsi ils vont oublier de compter des segments. D'autres vont se perdre dans des dessins trop chargés avec trop de points sans arriver à mettre en place une technique pour compter les segments. On peut ainsi aborder l'importance de la représentation schématique.



- Une bonne schématisation peut permettre d'aboutir à une "démonstration sans paroles".



- Dans le cadre d'une première narration, la difficulté peut être de rédiger, décrire les différentes étapes de la recherche.