

# Les puissances

Équipe DREAM

14 juillet 2020

## Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Énoncé du problème</b>               | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>Choix du problème</b>                | <b>2</b> |
| 2.1      | Compétences transversales . . . . .     | 2        |
| 2.2      | Connaissances mathématiques . . . . .   | 3        |
| <b>3</b> | <b>Analyse mathématique du problème</b> | <b>3</b> |
| <b>4</b> | <b>Analyse de productions</b>           | <b>3</b> |

# 1 Énoncé du problème

Le chiffre des unités de  $13^1$  est 3.

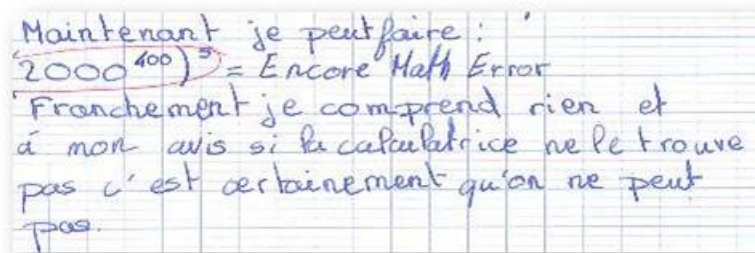
Le chiffre des unités de  $13^2$  est 9.

- Quel est le chiffre des unités de  $13^3$  ?
- Quel est le chiffre des unités de  $13^4$  ?
- Quel est le chiffre des unités de  $13^5$  ?
- Quel est le chiffre des unités de  $13^{2\,000}$  ?
- Quel est le chiffre des unités de  $13^{50\,003}$  ?

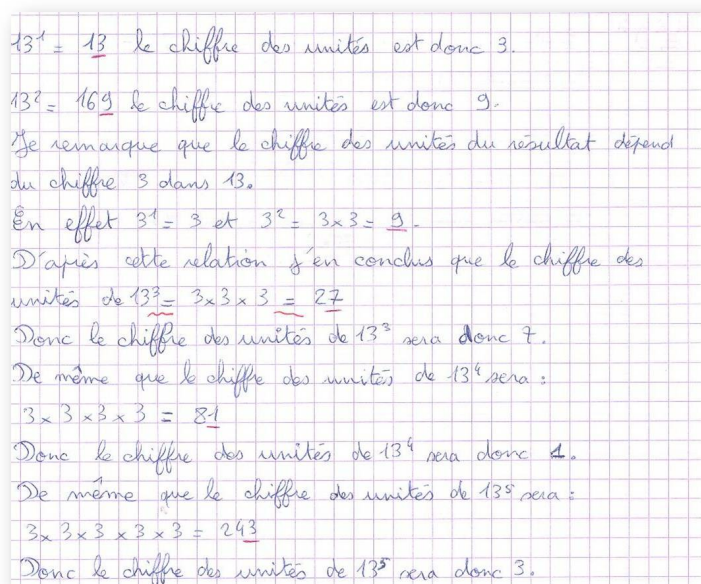
## 2 Choix du problème

### 2.1 Compétences transversales

- Lire attentivement l'énoncé : c'est ici impératif pour éviter de partir dans de longs et fastidieux calculs. Ce n'est effectivement pas le résultat du calcul qui est demandé mais seulement le chiffre des unités.
- Faire preuve de suffisamment d'autonomie face à la calculatrice : cet exercice peut être résolu correctement et complètement à cette condition. Les derniers calculs ne peuvent effectivement pas être affichés par la calculatrice de collège.



- Rédiger rigoureusement pour éviter des confusions, notamment au niveau mathématique avec l'emploi souvent abusif du signe « = ».



- Mettre en place une technique logique : il est nécessaire de mettre en évidence la répétition d'une même suite de chiffres et non pas réitérer indéfiniment la multiplication par 3 ou 13.

## 2.2 Connaissances mathématiques

- Utiliser la notion de puissance vue en classe de quatrième.
- Utiliser la calculatrice : les élèves peuvent ainsi entrer facilement dans le problème.
- Simplifier les calculs : reconnaître que les suites des chiffres des unités des puissance de 13 et de 13 sont les mêmes.
- Utiliser la division euclidienne en repérant la répétition d'une suite de quatre chiffres. A partir de la classe de Terminale, on peut aussi faire appel à la notion de congruence modulo 4.

## 3 Analyse mathématique du problème

La résolution de ce problème s'effectue en deux étapes.

1. Il est nécessaire de mettre en évidence la répétition d'une suite de quatre chiffres.

Les premiers calculs conduisent aux résultats suivants obtenus avec la calculatrice :

- le chiffre des unités de  $13^1$  est 3 ;
- le chiffre des unités de  $13^2$  est 9 ;
- le chiffre des unités de  $13^3$  est 7 ;
- le chiffre des unités de  $13^4$  est 1 ;
- le chiffre des unités de  $13^5$  est 3.

La réapparition du chiffre 3 multiplié au nombre 13, donne à nouveau 9 comme chiffre des unités et ainsi de suite. La période de la suite de chiffres qui apparaît est donc : 3 - 9 - 7 - 1.

2. Puisque la suite a une période de quatre chiffres, les calculs avec un grand exposant nécessitent d'effectuer une division euclidienne par 4.

- Pour  $13^{2\ 000}$ , on a  $2\ 000 = 4 \times 500$  (ou avec les congruences :  $2\ 000 \equiv 0(4)$ ), ce qui signifie que la période de quatre chiffres se répète exactement 500 fois et que le chiffre des unités du résultat est le dernier de la période.

Le chiffre des unités de  $13^{2\ 000}$  est donc 1.

- Pour  $13^{50\ 003}$ , on a  $50\ 003 = 4 \times 12\ 500 + 3$  (ou avec les congruences :  $50\ 003 \equiv 3(4)$ ), ce qui signifie que la période de quatre chiffres se répète 12 500 fois et est suivie de trois chiffres.

Le chiffre des unités de  $13^{50\ 003}$  est donc 7.

## 4 Analyse de productions

- La majorité des élèves réalise rapidement que seul le chiffre des unités est à prendre en compte.

Je ne comprend pas la consigne demandé de  
faire le calcul  $13^3$ . Je trouve 2197, & vois mal  
 $13^3 = 2197$  mot de consigne.

J'ai compris, il faut trouver le nombre de  
résultat donc dans 2197 le chiffre des  
unités est 7.

- On peut s'attendre à voir apparaître l'erreur classique de confusion entre puissance et multiplication.

Je me demande si je fais  $13 \times 50003$ , ça me donnerai un bon chiffre des unités de  $13^{50003}$ .

Bon, alors j'essaye avec :

- $13^4 = \dots 1$   
 $13 \times 4 = 52 \rightarrow 1 + 2$
- $13^3 = \dots 7$   
 $13 \times 3 = 39 \rightarrow 7 + 9$
- $13^5 = \dots 3$   
 $13 \times 5 = 65 \rightarrow 3 + 5$

J'ai fais 3 essais et cela suffit pour me prouver que cette méthode ne fonctionne pas. Peut-être que  $13 \cdot 50003$  pourrait fonctionner. Je fais des essais avec :

- De nombreux élèves sont confrontés aux limites de la calculatrice. Ils sont arrêtés par un message d'erreur lorsque le résultat est trop grand pour être affiché. Cela peut être l'occasion pour le professeur de revenir sur des *théorèmes élèves* comme  $13^{a+b} = 13^a + 13^b$  ou  $13^{a \times b} = 13^a \times b$ .

13 exposant 2000 = 13 exposant 1000 + 13 exposant 1000 (car c'est égale 13 exposant 2000)

= 13 exposant 500 + 13 exposant 500 + 13 exposant 500 + 13 exposant 500

= 13 exposant 250 + 13 exposant 250 + 13 exposant 250 + 13 exposant 250 + 13 exposant 250 + 13 exposant 250 + 13 exposant 250 + 13 exposant 250

= 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125

= 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5

= La calculatrice n'indique toujours pas la résultat.  
Il faut donc que je cherche une nouvelle technique.

Alors -- je réfléchis quelque instant et je croi que j'ai trouver une tech. que pour trouver  $13^{2000}$ .

= 2000 = 200 x 10. Donc je vais taper sur ma calculette  $13^{2000} = 13^{1000 \times 2} =$

Ah sa m'énervé su me remet math error. je vais essayer de faire  $13 \times 100 \times 10$  et sa me met 26000 je pense fortement que c'est faux mais je n'en suis pas sûr.

- Certains élèves calculent les puissances successives sans essayer de trouver une suite logique. C'est l'occasion pour le professeur de pointer la nécessité d'essais organisés et réfléchis.

- D'autres ne trouvent pas la période mais organisent leur recherche en différenciant, par exemple, les exposants pairs et impairs.

Je remarque que si l'exposant est pair alors l'unité sera 1 ou 9 et si l'exposant

impair alors il sera 3 ou 7.  
 Exemple:  
 $13^1 \Rightarrow$  impaire  $\Rightarrow 3$ ,  $13^3 \Rightarrow$  impaire  $\Rightarrow 7$   
 $13^2 \Rightarrow$  pair  $\Rightarrow 9$ ,  $13^4 \Rightarrow$  pair  $\Rightarrow 1$   
 Ainsi de suite...  
 Conclusion:  $13^{2003} \Rightarrow$  pair alors l'unité sera 9 ou 1.  
 Je me dit que si  $13^1 \Rightarrow 9$   
 Alors  $2 \times 1000 = 2000$  sera pair  
 donc pair être que  $13^{2000} \Rightarrow 9$ .  
 Donc pour  $13^{2003} \Rightarrow$  impaire  $\Rightarrow 3$  ou  $7$ .

- On a remarqué cependant que beaucoup d'élèves réussissent à mettre en évidence la période de quatre chiffres. Une étape supplémentaire est nécessaire pour utiliser ce résultat lorsque l'exposant est grand. Le professeur est amené à pointer l'utilisation de la division

euclidienne.