Le nombre de 0 de factorielle n
Exemples de mise en œuvre dans la classe

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

Enoncé au collège En mathématique, la factorielle d'un nombre entier est le produit des nombres entiers (supérieurs à 1) qui le précèdent.

Par exemple :
- Factorielle 3 s'écrit $1 \times 2 \times 3$ et est égale à 6
- Factorielle 4 s'écrit $1 \times 2 \times 3 \times 4$ et est égale à 24
- Factorielle 5 s'écrit $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ et est égale à 120

On remarque qu'il y a un « 0 » à la fin de Factorielle 5.

1. Combien y aura-t-il de « 0 » à la fin de Factorielle 7 ?
2. Combien y aura-t-il de « 0 » à la fin de Factorielle 17 ?
3. Et si on se posait la question pour n'importe quel nombre entier, comment pourrait-on faire pour trouver le nombre de « 0 » à la fin ?

Enoncé au lycée Combien y a-t-il de zéros à la fin de $n!$?

2 Scénario(s) dans la classe

2.1 En seconde

La classe de seconde comportait 23 élèves qui se sont répartis en 5 groupes avec un élève volontaire pour noter toutes les remarques et réflexions de ses camarades pendant la recherche.

Le professeur donne la définition de $n!$ à l'aide d'exemples : $3!$, $4!$, $5!$, $10!$ puis écris l'énoncé du problème au tableau.

Après un certain délai le professeur indique aux élèves où trouver la touche $\boxed{!}$ sur leur calculatrice. Cette information ne sera utile qu'à 3 groupes car un groupe avait trouvé tout seul et le dernier groupe n'a pas souhaité prendre en compte cet apport.

Au bout d'une heure de recherche le professeur distribue une feuille blanche aux groupes leur demandant de faire une synthèse de leurs résultats. Un quart d'heure après, chaque groupe passe au tableau pour présenter sa conclusion aux autres. L'ordre de passage est déterminé par le professeur en fonction de l'avancée des recherches de chaque groupe ...

Après chaque exposé il s'en suit quelques discussions. Mais surtout lors du passage du dernier groupe dont les résultats étaient bien plus avancés que les autres.

Le professeur n'a plus qu'à conclure, en redonnant quelques explications sur des erreurs importantes commises, sur des questions de définition de $n!$, expliquer brièvement à quoi elle correspond et surtout prolonger le débat entamé car la démonstration est loin d'être terminée ...

2.2 En première S

L'énoncé suivant est donné aux élèves de Première S sur feuille :

« On appelle $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times 4 ... \times (n-1) \times n$

par exemple $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ et $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
Peut-on prévoir le nombre de zéros qui terminent $n!$? »

Les élèves cherchent individuellement en silence pendant environ 10 minutes
(ils sont prévenus d'avoir à s'arrêter après ce laps de temps)

Les élèves remplissent le questionnaire numéro 1 dont l'objectif est double :

- repérer la façon dont les élèves attaquent spontanément le problème
- permettre aux élèves de prendre du recul sur leur démarche

Puis les élèves poursuivent la recherche en groupes de 3 ou 4.
Le professeur adopte une attitude neutre et si un groupe lui propose une solution il l'invite à la vérifier.

Après une demi-heure de recherche, un second questionnaire est donné à remplir sur lequel les élèves doivent indiquer leurs idées, bonnes ou mauvaises et ce qu'ils en ont fait.
Ce questionnaire ne sera ramassé qu'à la fin de la séance, et les élèves sont invités à continuer de le remplir jusqu'au bout, cependant un arrêt dans la recherche est nettement marqué pour permettre de commencer à le remplir.

Au bout d'une heure le professeur affiche :

« 40! = 815 915 283 247 897 734 345 611 269 596 115 894 272 000 000 000 »

en indiquant que nous avons obtenu ce résultat à l'aide d'un ordinateur.

Les élèves terminent la séance en préparant une affiche qui sera exposée et commentée pendant la prochaine heure de mathématiques, le lendemain.

2.3 Compte rendu en première S

Cette observation était destinée à tester les effets sur la recherche du dispositif de breaks périodiques décrit dans le scénario.
L'analyse du problème nous avait amenés à penser que les élèves seraient assez vite coincés dans leurs essais avec la calculatrice.

Devant : $14! = 8.717\ 829\ 12\ E\ 10$ trois attitudes nous paraissaient possibles :

- appel au secours du professeur
- 14! se termine par 2 zéros (le 10 de l'exposant moins les 8 décimales)
- abandon de la calculatrice pour commencer à repérer l'importance des facteurs 2 et 5

Aux élèves qui interpréteraient mal le résultat fourni par la calculatrice, on avait prévu de fournir d'autres calculatrices utilisant un nombre différent de chiffres pour leur montrer la variabilité dans l'affichage.

L'affichage de 40! jouait le rôle de joker pour éviter que des élèves persistent trop longtemps dans les erreurs rédhibitoires.

Contrairement à la consigne, les élèves qui étaient déjà regroupés par 3 ou 4 n'ont pas cherché seuls, ils ont tout de suite commencé à échanger entre eux.
Le premier questionnaire a été décevant car les réponses étaient trop prévisibles et les élèves n'ont pas tiré profit de cette interruption Plusieurs groupes ont commis l'erreur prévue : imaginer que les décimales situées après celles qui sont affichées sont des zéros. Cette attitude ne produit pas de résultats trop invraisemblables au début.

Un groupe a persisté dans cette erreur presque jusqu'à la fin.
Une élève a demandé au professeur s'il y avait une touche sur la calculatrice permettant d'obtenir les chiffres qui n'apparaissaient pas.
La constatation que les résultats fournis par la calculatrice sont assez vite inopérants pour ce problème amène les élèves : soit à un blocage, soit à la mise en place d'un procédé ce calcul à la main (attitude non observée ici), soit à l'abandon du calcul des factorielles des entiers successifs et à la recherche d'un raisonnement.
Les buts visés par le second questionnaire, qui étaient d'obliger les élèves à travers l'écriture d'un bilan à faire un travail de reconstruction et à se constituer une mémoire commune au groupe, ont été généralement atteints. Mais les groupes n'ont pas toujours compris qu'ils devaient répertorier aussi les idées fausses ou peut-être sont-ils gênés par le fait de rédiger des pistes abandonnées.
Dans un groupe où la communication était très faible, le moment de remplissage du questionnaire a été l'occasion de retrouver un fonctionnement de groupe (un des membres a expliqué sa conjecture).
Dans un autre groupe, une élève s'est investie dans un rôle de secrétaire de séance active : elle a remplie

le questionnaire en interrogeant ses partenaires et en faisant préciser certains points. Son travail a été très important pour la cohérence du groupe et a permis que le groupe parvienne à la fin de la séance à une synthèse réussie.

Trois groupes ont été plus spécialement observés pendant la séance.
Leur comportement s'est avéré très différent.

Le groupe 1 s'est trompé dans l'interprétation des résultats fournis par la calculatrice, il a longuement rempli un tableau de résultats $(n; n!)$ qui était donc en grande partie faux, et a recherché sur ce tableau des régularités. Le joker 40! les a amenés à reconnaître que ce qu'ils avaient fait était faux mais a provoqué une certaine déstabilisation (ils ont été jusqu'à penser que le nombre de zéros pouvait diminuer). C'est seulement tout à la fin qu'ils ont compris où se situait leur erreur et jamais ils n'ont aperçu ni la récurrence dans la définition de $n!$, ni le lien avec les facteurs 2 et 5. Ce groupe s'est investi dans une direction sans prendre le recul nécessaire : les interventions prévues par le professeur en cours de recherche n'ont ici pas été suffisantes. Par ailleurs, il est à noter que la situation ne donnait pas beaucoup de moyens de contrôle des résultats produits.

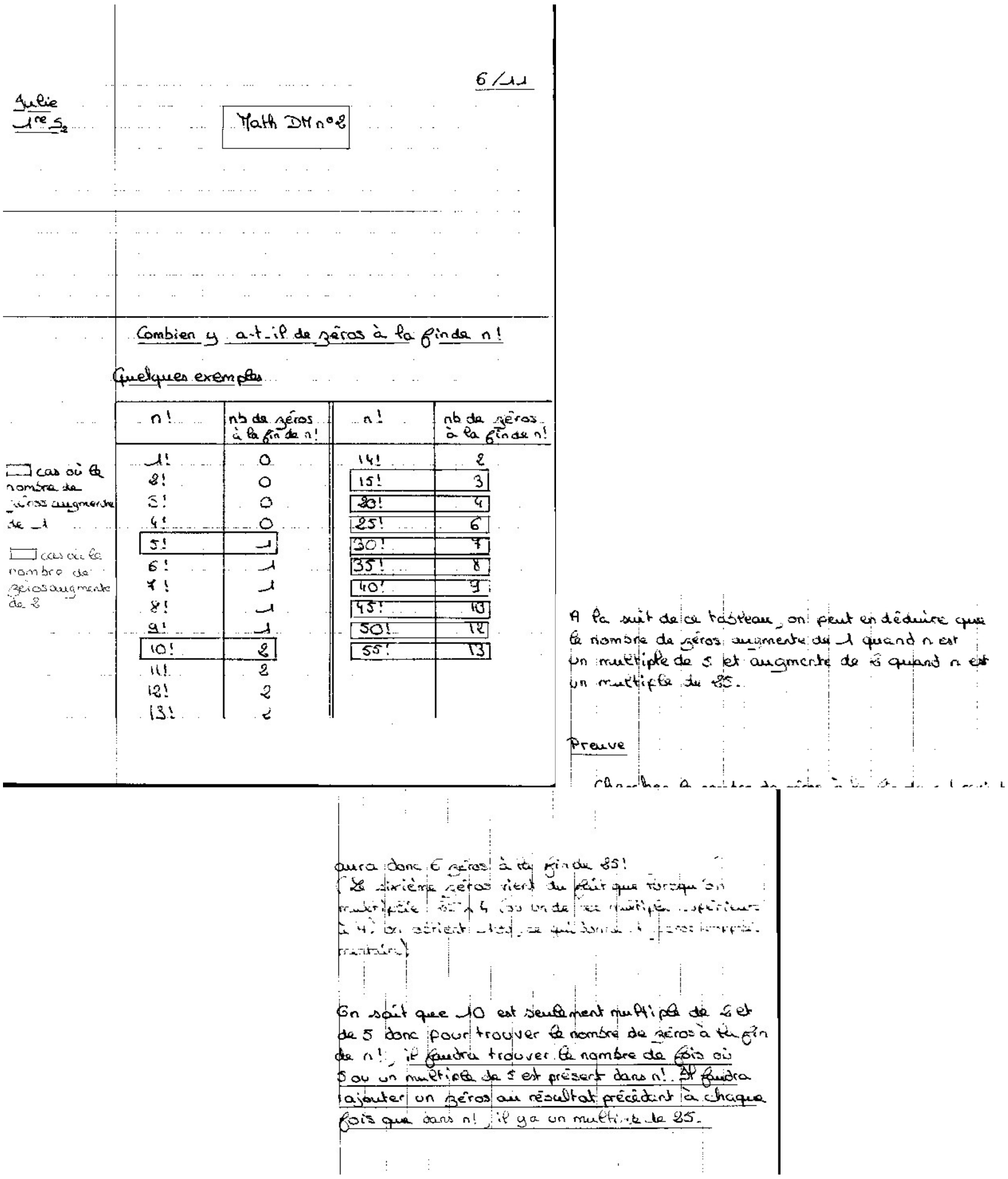
Le groupe 2 a très mal fonctionné comme groupe : deux élèves ne semblaient pas vouloir communiquer et le troisième a tenté vainement de servir de lien entre eux. Cependant le remplissage du second questionnaire a obligé le groupe à communiquer et a amené le plus solitaire à expliquer sa conjecture aux autres. Dans un fonctionnement de classe habituel, l'intervention du professeur qui n'était pas souhaitée dans le contexte de notre séance d'observation, est souvent déterminante pour amener le groupe à un fonctionnement collectif.

Le groupe 3 a proposé très vite la conjecture $f(n) = E\left(\frac{n}{5}\right)$. Le professeur leur ayant demandé s'ils en étaient sûrs, les élèves ont poursuivi la recherche et ont alors eu l'idée de compter les facteurs 2 et 5. Deux types d'entiers n les ont alors intéressés : 25 d'une part, 10, 100, 1000 d'autre part ; 100! est apparu comme contre-exemple de la conjecture initiale.
A ce stade ils ont essayé de construire une formule avec des logarithmes pour rendre compte du nombre de zéros de $10k!$. Après la relance 40!, un élève a trouvé une réponse prenant en compte les différents essais faits par le groupe, et finalement le groupe a décrit sur son affiche un algorithme détaillé exact qu'il a appelé : « pentatochomie ».
La récurrence $n! = n \times (n-1)!$, si elle a été un passage obligé du groupe, n'a jamais été explicitée. De même, le groupe a vite vu qu'il suffisait de compter les facteurs 5, mais ne l'a pas non plus explicité, ni dans le questionnaire, ni dans l'affiche.

Pour tous les groupes observés, il semble qu'il y ait un lien fort entre un fonctionnement riche : échanges, interactions,... et la mise en place d'un contrôle (collectif) sérieux de la recherche.
Comment constituer les groupes, comment créer dans un groupe l'équilibre nécessaire entre travail individuel et fonctionnement collectif, comment faire voir au groupe comment il fonctionne : voilà quelques directions de recherche ...

3 Production(s) d'élève(s)

Ce probléme a t́é donné comme devoir à la maison et les figures ci-dessous montrent trois copies des travaux réalisés par des élè ves d'une classe de première S.



Julie
1re S2

6/11

Math DM n°2

Combien y a-t-il de zéros à la fin de n!

Quelques exemples

▭ cas où le nombre de zéros augmente de 1

▭ cas où le nombre de zéros augmente de 2

n!	nb de zéros à la fin de n!	n!	nb de zéros à la fin de n!
1!	0	14!	2
2!	0	15!	3
3!	0	20!	4
4!	0	25!	6
5!	1	30!	7
6!	1	35!	8
7!	1	40!	9
8!	1	45!	10
9!	1	50!	12
10!	2	55!	13
11!	2		
12!	2		
13!	2		

A la suite de ce tableau, on peut en déduire que le nombre de zéros augmente de 1 quand n est un multiple de 5 et augmente de 2 quand n est un multiple de 25.

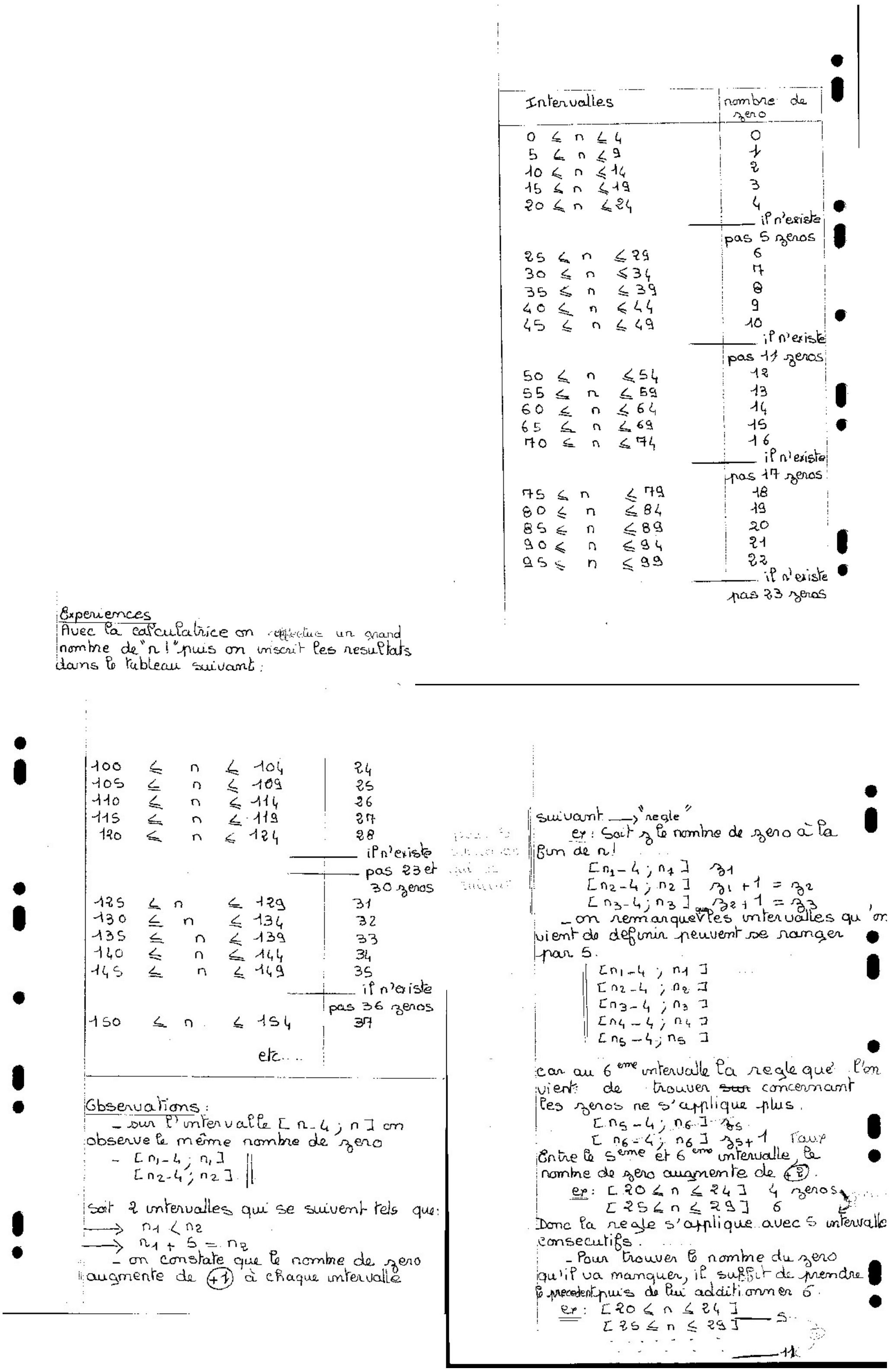
Preuve

[illegible]

aura donc 6 zéros à la fin de 25!
(Le dixième zéros vient du fait que lorsqu'on multiplie [illegible] [illegible])

On sait que 10 est seulement multiple de 2 et de 5 donc pour trouver le nombre de zéros à la fin de n!, il faudra trouver le nombre de fois où 5 ou un multiple de 5 est présent dans n!. Il faudra ajouter un zéros au résultat précédent à chaque fois que dans n!, il y a un multiple de 25.

Figure 1: Un compte rendu élève



Experiences
Avec la calculatrice on effectue un grand nombre de "n !" puis on inscrit les resultats dans le tableau suivant :

Intervalles	nombre de zero
$0 \leq n \leq 4$	0
$5 \leq n \leq 9$	1
$10 \leq n \leq 14$	2
$15 \leq n \leq 19$	3
$20 \leq n \leq 24$	4
	il n'existe pas 5 zeros
$25 \leq n \leq 29$	6
$30 \leq n \leq 34$	7
$35 \leq n \leq 39$	8
$40 \leq n \leq 44$	9
$45 \leq n \leq 49$	10
	il n'existe pas 11 zeros
$50 \leq n \leq 54$	12
$55 \leq n \leq 59$	13
$60 \leq n \leq 64$	14
$65 \leq n \leq 69$	15
$70 \leq n \leq 74$	16
	il n'existe pas 17 zeros
$75 \leq n \leq 79$	18
$80 \leq n \leq 84$	19
$85 \leq n \leq 89$	20
$90 \leq n \leq 94$	21
$95 \leq n \leq 99$	22
	il n'existe pas 23 zeros
$100 \leq n \leq 104$	24
$105 \leq n \leq 109$	25
$110 \leq n \leq 114$	26
$115 \leq n \leq 119$	27
$120 \leq n \leq 124$	28
	il n'existe pas 23 et 30 zeros
$125 \leq n \leq 129$	31
$130 \leq n \leq 134$	32
$135 \leq n \leq 139$	33
$140 \leq n \leq 144$	34
$145 \leq n \leq 149$	35
	il n'existe pas 36 zeros
$150 \leq n \leq 154$	37
etc...	

Observations :
– sur l'intervalle $[n-4 ; n]$ on observe le même nombre de zero
– $[n_1-4 ; n_1]$
$[n_2-4 ; n_2]$

soit 2 intervalles qui se suivent tels que :
$\longrightarrow n_1 < n_2$
$\longrightarrow n_1 + 5 = n_2$
– on constate que le nombre de zero augmente de (+1) à chaque intervalle suivant $\longrightarrow$ "regle"

ex : Soit z le nombre de zero à la fin de $n!$

$[n_1-4 ; n_1]$ z_1
$[n_2-4 ; n_2]$ $z_1+1 = z_2$
$[n_3-4 ; n_3]$ $z_2+1 = z_3$

– on remarque les intervalles qu'on vient de definir peuvent se ranger par 5.

$[n_1-4 ; n_1]$
$[n_2-4 ; n_2]$
$[n_3-4 ; n_3]$
$[n_4-4 ; n_4]$
$[n_5-4 ; n_5]$

car au 6ème intervalle la regle que l'on vient de trouver ~~sur~~ concernant les zeros ne s'applique plus.

$[n_5-4 ; n_5]$ z_5
$[n_6-4 ; n_6]$ z_5+1 faux

Entre le 5ème et 6ème intervalle le nombre de zero augmente de (+2).

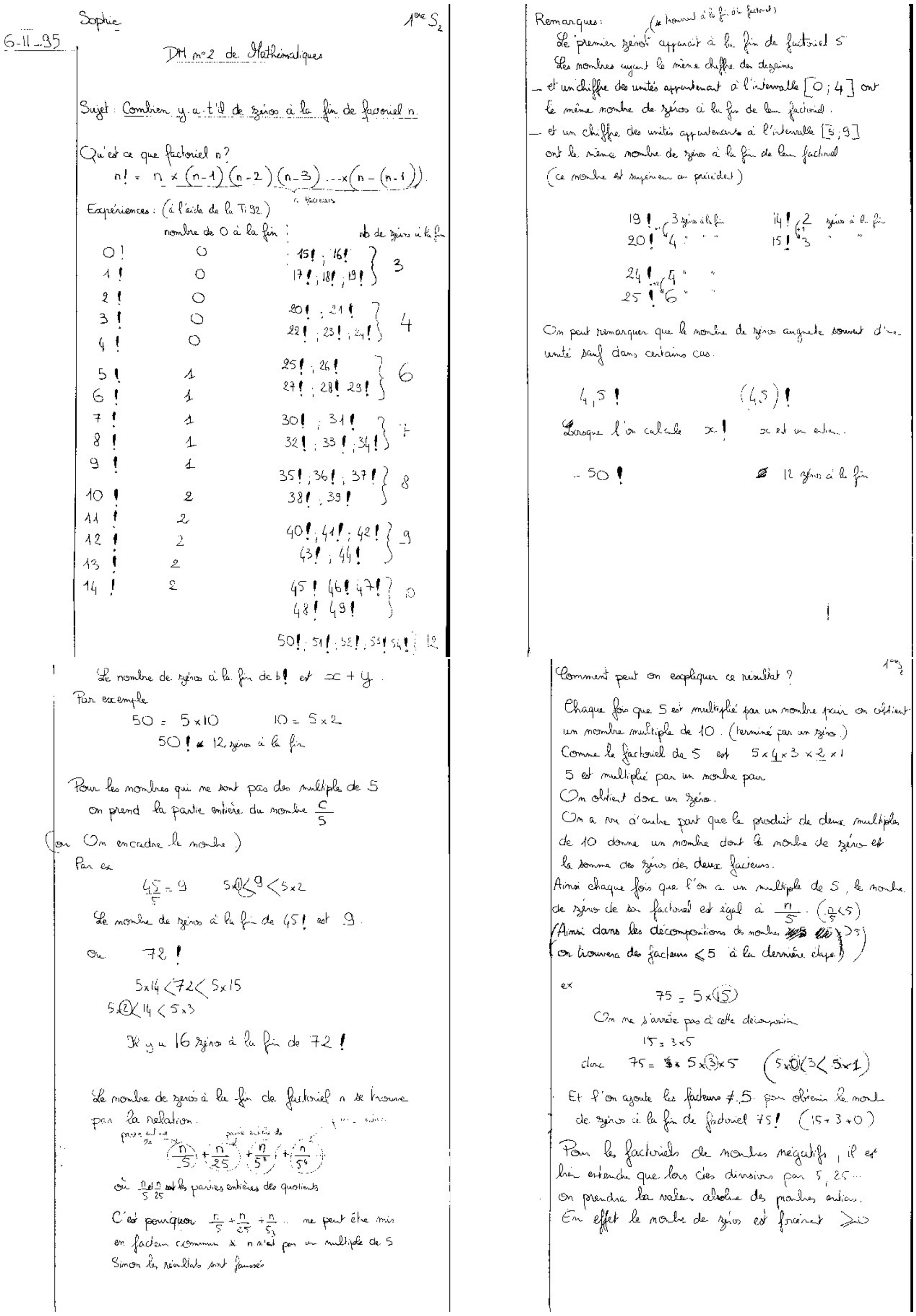
ex : $[20 \leq n \leq 24]$ 4 zeros
$[25 \leq n \leq 29]$ 6

Donc la regle s'applique avec 5 intervalle consecutifs.

– Pour trouver le nombre du zero qu'il va manquer, il suffit de prendre le precedent puis de lui additionner 6.

ex : $[20 \leq n \leq 24]$ — 5
$[25 \leq n \leq 29]$
— 11

Figure 2: Extrait d'un deuxième compte rendu


Sophie 1ère S2

6-11-95

DM n°2 de Mathématiques

Sujet : Combien y a-t-il de zéros à la fin de factoriel n.

Qu'est ce que factoriel n ?

n! = n × (n-1)(n-2)(n-3)...×(n-(n-1)).

n facteurs

Expériences : (à l'aide de la Ti 92)

	nombre de 0 à la fin :		nb de zéros à la fin
0!	0	15! ; 16! ; 17! ; 18! ; 19!	3
1!	0	20! ; 21! ; 22! ; 23! ; 24!	4
2!	0	25! ; 26! ; 27! ; 28! ; 29!	6
3!	0	30! ; 31! ; 32! ; 33! ; 34!	7
4!	0	35! ; 36! ; 37! ; 38! ; 39!	8
5!	1	40! ; 41! ; 42! ; 43! ; 44!	9
6!	1	45! ; 46! ; 47! ; 48! ; 49!	10
7!	1	50! ; 51! ; 52! ; 53! ; 54!	12
8!	1		
9!	1		
10!	2		
11!	2		
12!	2		
13!	2		
14!	2		

Remarques : (le nombre à la fin de factoriel)

Le premier zéro apparaît à la fin de factoriel 5

Les nombres ayant le même chiffre des dizaines

– et un chiffre des unités appartenant à l'intervalle [0 ; 4] ont le même nombre de zéros à la fin de leur factoriel.

– et un chiffre des unités appartenant à l'intervalle [5 ; 9] ont le même nombre de zéros à la fin de leur factoriel (ce nombre est supérieur au précédent)

19! 3 zéros à la fin 14! 2 zéros à la fin

20! 4 " " 15! 3 " "

24! 4 "

25! 6 "

On peut remarquer que le nombre de zéros augmente souvent d'une unité sauf dans certains cas.

4,5 ! (4,5) !

Lorsque l'on calcule x! x est un entier...

.. 50 ! 12 zéros à la fin

!

Le nombre de zéros à la fin de b! est x + y.

Par exemple

50 = 5 × 10 10 = 5 × 2

50 ! 12 zéros à la fin

Pour les nombres qui ne sont pas des multiple de 5 on prend la partie entière du nombre $\frac{C}{5}$

(ou On encadre le nombre)

Par ex

$\frac{45}{5} = 9$ 5×8 < 9 < 5×2

Le nombre de zéros à la fin de 45! est 9.

Ou 72 !

5×14 < 72 < 5×15

5×2 < 14 < 5×3

Il y a 16 zéros à la fin de 72 !

Le nombre de zéros à la fin de factoriel n se trouve par la relation.

$\frac{n}{5} + \frac{n}{25} + \frac{n}{5^3} + \frac{n}{5^4} \ldots$

où $\frac{n}{5}$ et $\frac{n}{25}$ sont les parties entières des quotients

C'est pourquoi $\frac{n}{5} + \frac{n}{25} + \frac{n}{5^3}$ ... ne peut être mis en facteur commun si n n'est pas un multiple de 5

Sinon les résultats sont faussés

1ère

Comment peut on expliquer ce résultat ?

Chaque fois que 5 est multiplié par un nombre pair on obtient un nombre multiple de 10. (terminé par un zéro)

Comme le factoriel de 5 est 5×4×3×2×1

5 est multiplié par un nombre pair

On obtient donc un zéro.

On a vu d'autre part que le produit de deux multiples de 10 donne un nombre dont le nombre de zéros est la somme des zéros des deux facteurs.

Ainsi chaque fois que l'on a un multiple de 5, le nombre de zéros de son factoriel est égal à $\frac{n}{5}$. ($\frac{n}{5} < 5$)

(Ainsi dans les décompositions de nombres ... > 5)

(on trouvera des facteurs ≤ 5 à la dernière étape)

ex

75 = 5×15

On ne s'arrête pas à cette décomposition

15 = 3×5

donc 75 = 5×3×5 (5×3 < 3 < 5×1)

Et l'on ajoute les facteurs ≠ 5 pour obtenir le nombre de zéros à la fin de factoriel 75! (15 + 3 + 0)

Pour les factoriels de nombres négatifs, il est bien entendu que lors des divisions par 5, 25... on prendra la valeur absolue des nombres entiers.

En effet le nombre de zéros est forcément > 0

Figure 3: Un exemple d'allers-retours de l'expérience au raisonnement