Le plus grand produit
Exemples de mise en œuvre dans la classe

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

2 Scénario(s) dans la classe

2.1 Scénario au Cycle 3

Le texte qui suit est extrait de l'ouvrage « Vrai ? Faux ? ... On en débat » auquel nous renvoyons pour plus de détails [1].

Déroulement de la situation dans un CM1

Cette situation se compose de deux phases bien distinctes.

La première phase porte sur la recherche des solutions pour quelques valeurs numériques (10, puis 14, et éventuellement 16). Elle a pour but de permettre l'appropriation du problème : que les élèves comprennent qu'ils ont à décomposer additivement un nombre, à calculer le produit correspondant, à effectuer plusieurs essais, puis à les comparer pour optimiser le résultat. L'objet de cette phase n'est pas de prouver si les résultats obtenus sont les plus grands, ce qui sera proposé à la phase suivante. La recherche est individuelle. Le maître fait formuler les différents résultats en commençant par les décompositions additives erronées (celles dont la somme des termes est différente du nombre donné au départ, par exemple à la suite d'une erreur de calcul), puis par celles qui ne sont pas les plus pertinentes (par exemple $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$), et enfin les meilleures trouvées, mais sans se prononcer sur le fait que le résultat produit est bien le plus grand possible.

Dès la fin de la première phase, les élèves décomposant en plus de deux termes, des constats peuvent aussi être formulés, comme justification des choix avancés, voire des premières propositions de généralisation, par exemple :

- « ce n'est pas parce qu'il y a beaucoup de termes qu'on a forcément un grand produit » ;
- « utiliser 1 ne sert à rien » ;
- « ce n'est pas en ne prenant que deux grands nombres [en décomposant 14 en deux nombres] que l'on a un grand produit »...

Dans une seconde phase les élèves cherchent une méthode plus générale. Cette phase se déroule lors d'une nouvelle séance, un autre jour, pour permettre à chaque élève de se « décentrer » des calculs qu'il a effectués pour des nombres particuliers lors de la séance précédente. L'objectif de cette phase est de faire prendre conscience aux élèves que, pour chaque proposition, il faut savoir :

- si on est sûr qu'elle est vraie et pourquoi ?
- ou s'il faut chercher à le montrer et comment ?

Dans cette seconde phase, plusieurs étapes :

a. étape 1 : les élèves élaborent individuellement des propositions.
   Ce moment est particulièrement important pour qu'il y ait un « engagement » personnel ultérieur des élèves sur leurs propositions.
b. étape 2 : Les propositions sont débattues collectivement
   — tri préalable des propositions par le maître (Renvoi à l'ouvrage cité pour des détails)

1. Le déroulement est présenté de façon détaillée dans ERMEL CM1.

— débat sur les différents types de propositions.

c. étape 3 : Les élèves ont à se prononcer par petits groupes sur des propositions sur lesquelles il n'a pas été possible de trancher lors de l'étape précédente. Il s'agit de répondre à la question : sont-elles vraies, fausses, et pourquoi ? Chaque groupe rédige sa réponse sur une affiche.

d. étape 4 : Mise en commun : elle permet de faire expliciter les conclusions de chaque groupe et de mener un débat collectif sur la validité de ces propositions. Le but de cette étape est de critiquer les preuves énoncées précédemment. Les propositions sont examinées, les preuves sont formulées.

e. étape 5 : Une relance de la recherche peut être effectuée si nécessaire.

f. étape 6 : Une synthèse peut être faite par le maître si nécessaire, sinon le maître peut demander aux élèves ce qu'ils pensent avoir appris.

2.2 Scénario pour le collège ou le début du lycée

La séance dure 2h
L'énoncé est écrit au tableau par le professeur : « Parmi les décompositions additives d'un entier, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand »
La présentation du problème et si les élèves le demandent explicitation de certains termes de l'énoncé : 10 minutes
La recherche individuelle : 10 minutes
La recherche en groupes de 3 ou 4 élèves : 1h (dont la rédaction de l'affiche)
La mise en commun : 40 minutes (nécessité de créer un débat et d'obtenir des éléments de preuve)

Expliquer le terme « décomposition additive », à partir d'un exemple. Les élèves sont ensuite invités à une recherche individuelle.
Travail de groupe : la consigne peut être de résoudre le problème mais aussi de présenter les résultats obtenus sur une affiche. L'objectif est alors, pour chaque groupe, la rédaction d'une affiche visant à convaincre la classe de la validité de la réponse au problème posé ; un temps de 10 minutes étant prévu pour la réalisation de cette affiche.
Il est important de faire désigner un porte-parole et un rédacteur dans chaque groupe dont les rôles sont à préciser dans la présentation de l'activité.
Le temps de travail de groupe est à moduler en fonction de la classe mais au minimum 30 min. sont nécessaires.
Mise en commun : à partir des affiches réalisées, le professeur peut mettre en évidence les raisonnements et s'appuyer sur les conjectures pour faire avancer la résolution du probème (ou débattre des différentes propositions)

2.3 Sénario pour une séance avec des stagiaires PCL

La séance dure 1h 20 :
La présentation du problème et la recherche individuelle : 10 minutes
La recherche en 4 groupes de 4 ou 5 éltudiants : 50 minutes (dont la rédaction de l'affiche).
La mise en commun : 20 minutes
L'énoncé est dicté par le formateur : « Parmi les décompositions additives d'un entier, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand »

Les objectifs de cette séance sont les suivants :

- Présenter ce qu'est un problème de recherche en en faisant chercher un aux stagiaires, plutôt que de faire un cours magistral à ce propos.
- Institutionnaliser, après cette recherche, les éléments théoriques suivants : caractéristiques d'un problème de recherche, objectifs didactiques et pédagogiques poursuivis, gestion de la classe, obstacles à la mise en œuvre, points positifs, etc.

3 Production(s) d'élève(s)

3.1 Élèves de seconde

Quelques affiches produites par des élèves de secondes, l'orthographe est d'origine

Groupe A

1 – Pour les entiers multiples de 3, la solution sera une decomposition de 3.

Ex : $12=3+3+3+3$ $\quad$ $3^4=81$

2 – Pour les entiers multiples de 3+1, ce sera une decomposition de deux fois 2 et de 3.

Ex : $9+1=10=2+2+3+3$ $\quad$ $2^2\times 3^2=36$

3 – Pour les entiers multiples de 3+2, ce sera une decomposition d'une fois 2 et de 3.

Ex : $9+2=11=2+3+3+3$ $\quad$ 2×3^3

Attention : pour 1, ces règles ne marchent pas.

Groupe C $\quad$ Maths

- exemples :

$12=2+2+2+2+2+2=2^6=64$ $\quad$ $12=3+3+3+3=3^4=81$ $\quad$ $\boxed{81>64}$

$15=2+2+2+2+2+2+3=2^6\times 3=192$ $\quad$ $15=3+3+3+3+3=3^5=243$ $\quad$ $\boxed{243>192}$

$25=2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+3=2^{11}\times 3=6144$

$25=3+3+3+3+3+3+3+2+2=3^7\times 2^2=8748$ $\quad$ $\boxed{8748>6144}$

- Conjecture : Pour trouver le produit des termes le plus grand possible, il faut : décomposer ce nombre avec le plus de 3 possible (multiples de 3), si la somme des 3 ne suffit pas, il faut compléter par des 2.

Groupe D $\quad$ Problème :

□0 = 0 □1 = 1 □2 = 2 □3 = 3 □4 = $2+2\to 2\times 2=4$ □5 = $3+2\to 3\times 2=6$ □6 = $3+3\to 3\times 3=9$

□7 = $3+2+2\to 3\times 2\times 2=12$ □8 = $3+3+2\to 3\times 3\times 2=18$ □9 = $3+3+3\to 3^3=27$ □10 = $3+3+2+2\to 3^2+2^2=3$

$\boxed{N>10=3x+2y\to 3^x\times 2^y}$ avec y le plus petit possible.

Explication : Il faut décomposer l'entier naturel en le plus de termes de 3 possible en complétant avec des termes de 2.

Groupe E

Plus il y a de termes, plus le produit sera grand !

Ex : 38

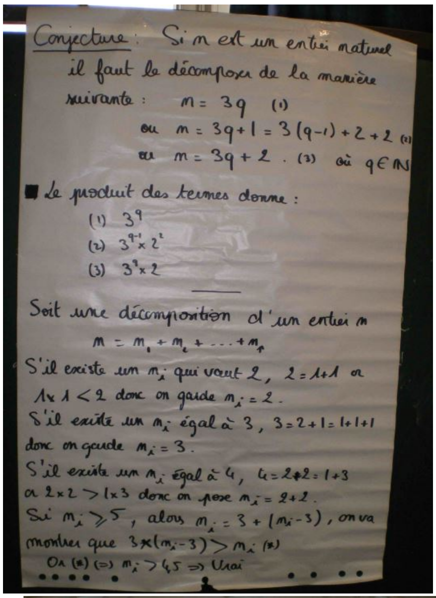
$\to 3^{12}+2^1=1062882$ $\quad$ $4^9+2^1=524288$ $\quad$ $2^{19}+0=524288$ $\quad$ $5^7+3^1=234275$

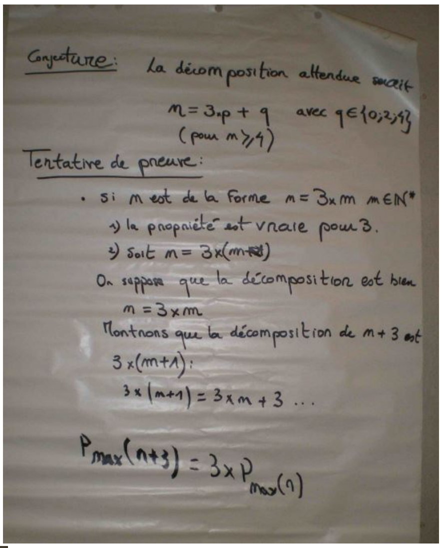
Le produit qui permet de trouver le plus grand résultat est 3.

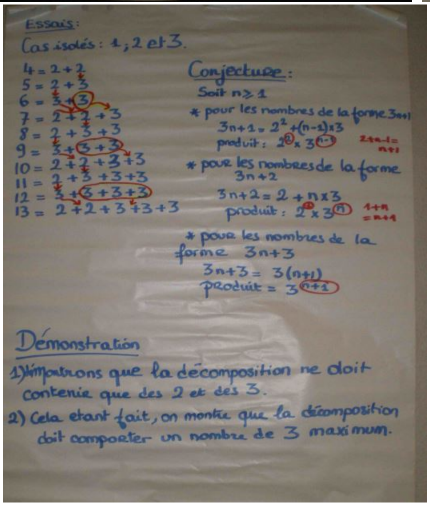
On définit les inconnus de l'équation suivante : $x:3=y+(z:2)$ avec x entier naturel, y produit de 3 et z reste.

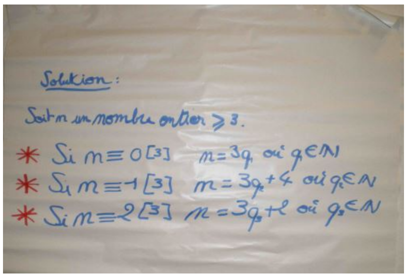
3.2 Stagiaires PCL

Quelques affiches produites par des stagiaires PCL









4 Comptes rendus (de l'enseignant)

4.1 Compte rendu au cycle 3

Les choix effectués par le maître lors du déroulement de la situation sont t́erminants, en particulier il ne peut pas laisser s'effectuer des recherches pour trop de valeurs numŕiques diffŕentes, lors de la première phase, sinon les Íèves auraient plus de diffcultś à se décentrer de ces calculs, pour formuler une proposition générale. De plus, si les calculs sont accumulés pour beaucoup de nombres, la solution risquerait de se diffuser dans toute la classe ; la seconde phase n'aurait plus pour but que la preuve d'une solution devenue évidente pour beaucoup d'élèves, alors convaincus car ils n'auraient pas de meilleure proposition à faire. Une autre tâche du maître consiste à effectuer le tri des propositions produites par les élèves, pour en permettre la critique à l'étape 2. Le nombre de propositions soumises à la critique (pour ce problème où leur analyse par chaque groupe prend du temps) ne peut être trop grand. Le maître veille aussi, à faire

formuler ou reformuler les propositions, et les raisonnements les critiquant ou les justifiant, à faire péciser le statut qu'acquièrent les propositions débattues, infirmées, confi
rmées et à faire expliciter les preuves.

4.2 Compte rendu avec les stagiaires PCL

Les stagiaires se sont pris au jeu ; leur recherche a été active, le travail de groupe dynamique et efficace.
Pendant le temps de recherche individuelle, un seul stagiaire a utilisé le calcul algébrique, les autres ont fait des essais numériques. La conjecture exacte n'est pas apparue tout de suite, même en travail de groupe. Elle a été le fruit de débats utilisant des exemples, des contre-exemples extraits des essais effectués précédemment. Ensuite, les groupes ayant trouvé la conjecture exacte ont essayé de la démontrer. Tous en ont exprimé la nécessité. Seul un groupe a trouvé la démonstration complète. Deux autres groupes ont tenté une démonstration par récurrence : l'un d'eux n'a pas abouti et n'a pas rédigé ses essais sur l'affiche, l'autre groupe a rédigé sur l'affiche en posant le problème. Comme l'a résumé l'un des stagiaires à la fin de la mise en commun : « il y en a, des maths, dans ce problème ! »
C'est une réflexion qui revient assez souvent lors de ce genre de séance où l'on fait chercher un problème ouvert à des stagiaires PCL : l'énoncé leur paraît simple (il l'est !) ; mais assez vite, il leur résiste, et il leur semble alors que la consistance mathématique est présente, qu'il y a « du grain à moudre » en quelque sorte.