Le nombre de 0 de factorielle n
Analyse mathématique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 L'énoncé du problème

Enoncé au collège En mathématique, la factorielle d'un nombre entier est le produit des nombres entiers (supérieurs à 1) qui le précèdent.

Par exemple :
- Factorielle 3 s'écrit $1 \times 2 \times 3$ et est égale à 6
- Factorielle 4 s'écrit $1 \times 2 \times 3 \times 4$ et est égale à 24
- Factorielle 5 s'écrit $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ et est égale à 120

On remarque qu'il y a un « 0 » à la fin de Factorielle 5.

1. Combien y aura-t-il de « 0 » à la fin de Factorielle 7 ?
2. Combien y aura-t-il de « 0 » à la fin de Factorielle 17 ?
3. Et si on se posait la question pour n'importe quel nombre entier, comment pourrait-on faire pour trouver le nombre de « 0 » à la fin ?

Enoncé au lycée Combien y a-t-il de zéros à la fin de $n!$?

2 Solution(s), piste(s) de solution(s)

Un nombre m écrit dans la base 10 se termine par k zéros si et seulement si sa décomposition en produit de facteurs premiers peut s'écrire :

$$m = 2^{k_1} \times 5^{k_2} \times \cdots$$

avec $k = min(k_1, k_2)$.

Preuve :

Supposons que le nombre m se termine par k zéros alors $m = m_1 \times 10^k = m_1 \times 2^k \times 5^k$;
Si 5 divise m_1 alors 2 ne divise pas m_1 (sinon il y aurait un 0 de plus) et de mÃªme si 2 divise m_1 alors 5 ne divise pas m_1. Donc $m = 2^{k_1} \times 5^{k_2} \times \cdots$ avec $k = min(k_1, k_2)$

Réciproquement :

Si $m = 2^{k_1} \times 5^{k_2} \times \cdots$ avec $k = min(k_1, k_2)$ alors $m = 2^k \times 5^k \times 2^{k_1-k} \times 5^{k_2-k} \times \cdots$ et l'un des deux nombres $k_1 - k$ et $k_2 - k$ au moins est nul ; donc m se termine par k zéros.

Pour déterminer le nombre de zéros à la fin de $n!$, il suffit donc de déterminer l'exposant de 5 dans la décomposition en produit de facteurs premiers, le nombre de 2 étant plus important que le nombre de 5 ...
Ce que l'on peut obtenir de la manière suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{n}{5^k}\right)$$

ou bien

$$\sum_{k=1}^{p} E\left(\frac{n}{5^k}\right)$$

avec p l'entier tel que $5^p \leq n < 5^{p+1}$