Les urnes de Pòlya
Analyse didactique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

L'énoncé général peut s'écrire de la manière suivante :
Une urne contient une boule rouge et une boule noire indiscernables au touché. L'expérience aléatoire consiste à extraire une boule de l'urne et à la remettre dans l'urne et ajouter une boule de même couleur.
On réitère cette expérience.
Étudier la composition de l'urne.

2 Variables de la situation

L'énoncé est bien sûr une variable didactique fondamentale en fonction des objectifs d'apprentissage que l'on veut donner à la situation. Voir à ce propos les énoncés proposés en classe de seconde (première approche de l'équiprobabilité et fluctuations d'échantillonnage) et en classe de BTS (utilisation des tests statistiques).
On peut aussi plus insister sur ce qui se passe au bout d'un nombre fini d'expériences ou bien regarder la convergence de la proportion de boules dans l'urne. Les questions qui se posent ne sont pas de même niveau de difficulté. En particulier, au lycée, étudier l'urne après n étapes est très abordable. Une variable est alors de faire varier le nombre d'étapes : s'il est possible de schématiser 4 ou 5 étapes, ça deviendra beaucoup plus délicat pour 10 ou plus. Il est alors possible de faire le lien entre les expériences réalisées et la justification théorique qui peut être mise en évidence.
Il est aussi possible de diriger l'énoncé pour programmer la simulation de cette expérience. Sur tableur ou en utilisant un langage de programmation. Par exemple en Python (Python 2, en l'occurrence) :

```
import random
def simul(r,b,n,stop):
    if n==stop+1:
        print 'nombre de boules rouge',r,'nombre de boules blanches',b
return
    hasard=random.uniform(0,1)
    if hasard<float(r)/float(r+b):
        simul(r+1,b,n+1,stop)
    else:
        simul(r,b+1,n+1,stop)
```

3 Connaissances et capacités en jeu

Les connaissances mathématiques en jeu sont variables suivant le niveau auquel on propose le problème. Pour les classes de troisième ou seconde, les notions d'expériences aléatoires, de fluctuation d'échantillonnage, de probabilité et d'équiprobabilité sont au cœur de la situation.
En classe de première, la définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini et l'utilisation de modèles définis à partir de fréquences observées sont des connaissances que cette situation permet d'aborder. Arbre de probabilité, $p(A \cap B) = pA/B) \times p(B)$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ peuvent aussi être abordés.
Pour des classes de fin de lycée ou d'université, la notion de variable aléatoire, de loi d'une variable, les notions de convergence en loi, convergence presque sûre, de fonction de répartition,

de densité peuvent être abordées à partir de cette situation. On peut parler de probabilités conditionnelles et du théorème des probabilités totales. Suivant le niveau d'enseignement, la situation permet d'aborder la notion de test (voir à ce propos la mise en œuvre de la situation dans une classe de BTS).
Une réflexion autour de l'expérience aléatoire, de la multiplication de telles expériences est centrale dans cette situation. La simulation et la programmation de telles simulations dans des langages de programmation variés peut également être abordés. En particulier, le lien et les différences entre un modèle mathématique et une simulation sur ordinateur est intéressant de développer.

4 Procédure(s) élèves

Les procédures que les élèves peuvent mettre en place dans la résolution de ce problème sont bien sûr extrêmement dépendantes du niveau de connaissances en probabilité.
Les expériences menées en seconde montrent que l'expérience effective permet aux élèves de bien comprendre le problème posé. En revanche la difficulté provient de ce que l'expérience ne permet pas de conclure. Pour dessiner un arbre, les élèves ont besoin d'un coup de main. Mais, une fois dirigés, ils sont tout à fait capables de le tracer et de déterminer les probabilités sur chaque branche. Un travail d'institutionnalisation est encore à faire.

5 Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)

Une difficulté peut provenir du fait que les élèves ont tendance à penser, surtout dans les petites classes, que s'il y a n résultats possibles à une expérience aléatoire, alors les sept résultats sont équiprobables. Du coup cette situation ne déstabilise pas cette position, ce qui implique de la proposer en relation avec d'autres où l'équiprobabilité n'apparaît pas : somme ou différence de deux dés, par exemple.
Dans les classes de BTS, la loi uniforme trouvée peut poser un problème aux étudiants qui ont déjà rencontré des lois de probabilité normale, de Poisson,. . .Le côté « plat » de la loi peut être une difficulté.
Une autre difficulté provient de l'interprétation que les élèves peuvent faire de la situation. En effet, ils sont rapidement conscient du fait que les premières boules tirées sont déterminantes quant à la composition ultérieure de l'urne. Le déséquilibre de l'urne si, par exemple on a tiré une boule blanche dans les trois premières étapes, peut aller à l'encontre du résultat à trouver, l'équiprobabilité des compositions de l'urne.