Le billard
Ouverture mathématique, prolongement didactique

Équipe DREAM

15 juillet 2020

Table des matières

1 Ouvertures mathématiques

Le billard mathématique est la donnée d'une table T qui peut ne pas être rectangulaire et d'une boule qui se déplace, sans frottement, et rebondit sur les bords suivant la loi de la réflexion, c'est à dire, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion (Voir la figure 1). La question qui se pose est de déterminer la trajectoire de la boule, considérée comme un point, en supposant qu'une fois lancée, elle continue son chemin indéfiniment. On peut par exemple se poser la question de savoir si, un point du billard étant donné, la boule passera par ce point. L'exemple du billard rectangulaire montre que la réponse n'est pas si simple !

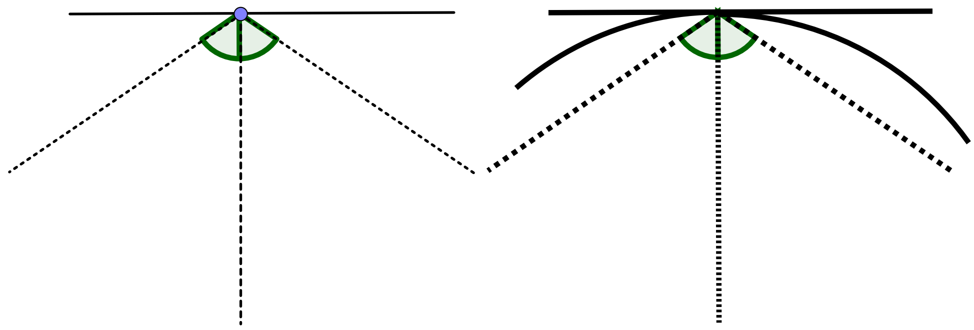

Figure 1 – Des rebonds sur des billards...

Exemple d'un billard rectangulaire

Si A et B sont donnés sur la table T, existe-t'il toujours une trajectoire qui rebondit sur les 4 côtés, partant de A et passant par B ?
Une façon de "voir" la réponse est de dessiner la reproduction de la table par translations (Figure 2). On voit en particulier que la zone dessinée en bleue ne pourra pas être atteinte, ce qui revient à dire que le point B, s'il se trouve dans cette zone ne pourra se trouver sur la trajectoire de A après 4 rebonds si on impose l'ordre des réflexions (haut, droit, bas, gauche dans notre exemple). Existe-t'il alors une zone qui, quelque soit la position de A ne sera jamais atteinte ? (Le lecteur pourra essayer avec la figure Geogebra !)
Un autre problème qui peut être posé est de se demander s'il est possible et à quelles conditions la trajectoire de la boule se ferme.
Que se soit possible est simple : il suffit de considérer un billard 1×2 et une boule partant du milieu d'un côté dans la direction du milieu du côté suivant comme indiqué sur la figure 3. Les pentes des segments sont égales en valeur absolue et vaut le rapport de la longueur à la largeur. Ce qui donne l'idée de continuer.

Représentation sur un tore

Une représentation de la trajectoire peut être faite sur le tore représenté par le grand rectangle où les côtés adjacents apparaissent de la même couleur (Fig. 4)
La question se pose de savoir si cette trajectoire se ferme, et d'une façon plus générale, quelles conditions initiales doivent être remplies pour qu'une trajectoire se ferme.
En « dépliant » le rectangle (dont on suppose qu'il a pour mesure $a \times b$, (ici 10×5) c'est à dire en le reproduisant à l'infini dans le plan, il faudrait que la droite définie par le point d'origine (sur la figure 4, le point de coordonnées (1,3)) et la pente de la trajectoire (ici 2) passe par un point « de départ » ddans une des répliques du rectangle. C'est à dire par un point qui serait

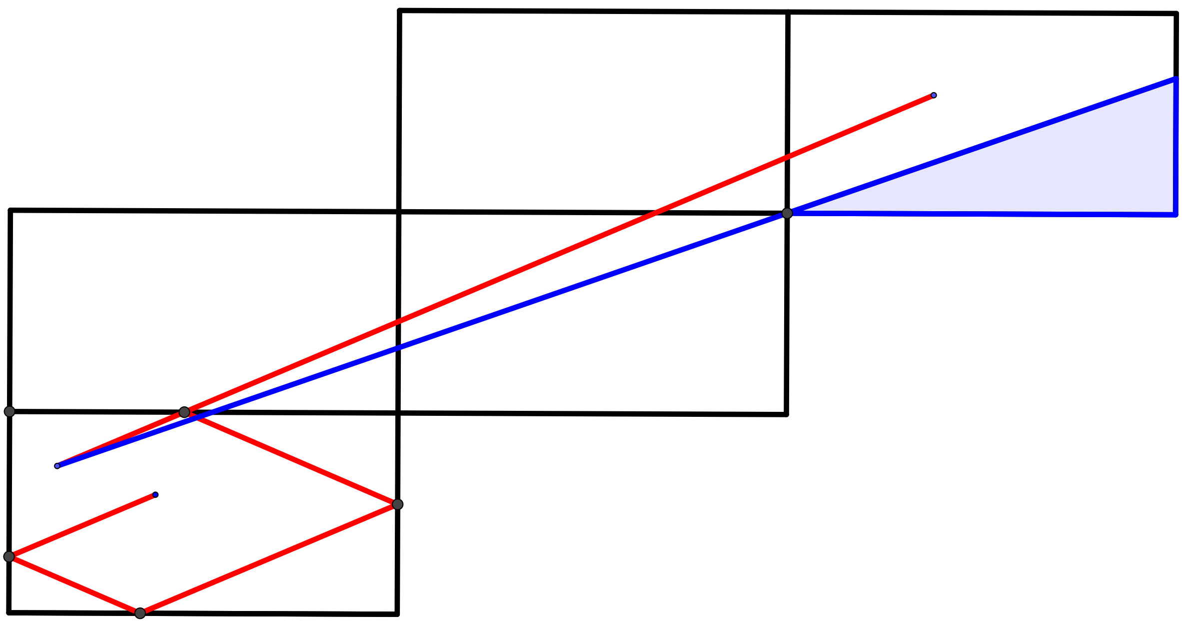

Figure 2 – La zone bleue ne pourra pas être atteinte en partant de A

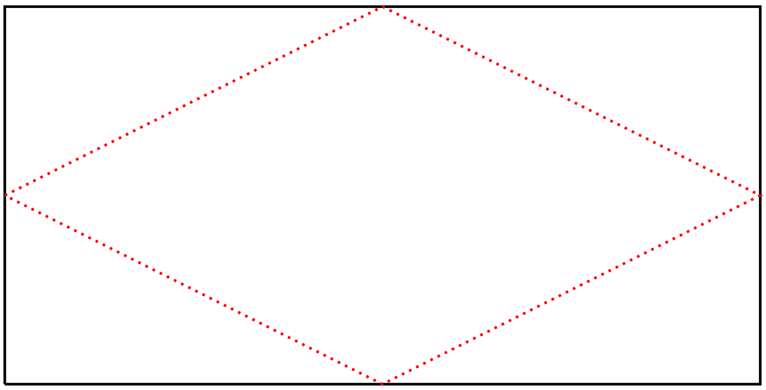

Figure 3 – Une trajectoire fermée

l'image du point de départ par une translation de vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ainsi si $(D_1(x_0, y_0)$ est le point de départ, p la pente de la trajectoire, alors la trajectoire se fermera si et seulement si il existe deux entiers h et k tels que $y_0 + hb = p(x_0 + ka - x_0) + y_0$ soit encore si et seulement si :

$$p = \frac{h}{k}\frac{b}{a}$$

Ainsi, dans notre exemple, la trajectoire se fermera puisque :
$D_1(1, 3)$
$p = 2$
trajectoire : droite d'équation $y = 2x + 1$
$3 + 10h = 2(1 + 5k) + 1$ soit $h = k$; si $h = k = 0$ c'est le point D_1, si $h = k = 1$, c'est le point $D_2(11, 23)$.
Remarque : si la pente n'est pas le produit de $\frac{b}{a}$ par un nombre rationnel, alors la trajectoire ne se terminera pas et sera dense dans le rectangle. C'est le cas si on choisit, par exemple une pente égale à $\sqrt{2}$.

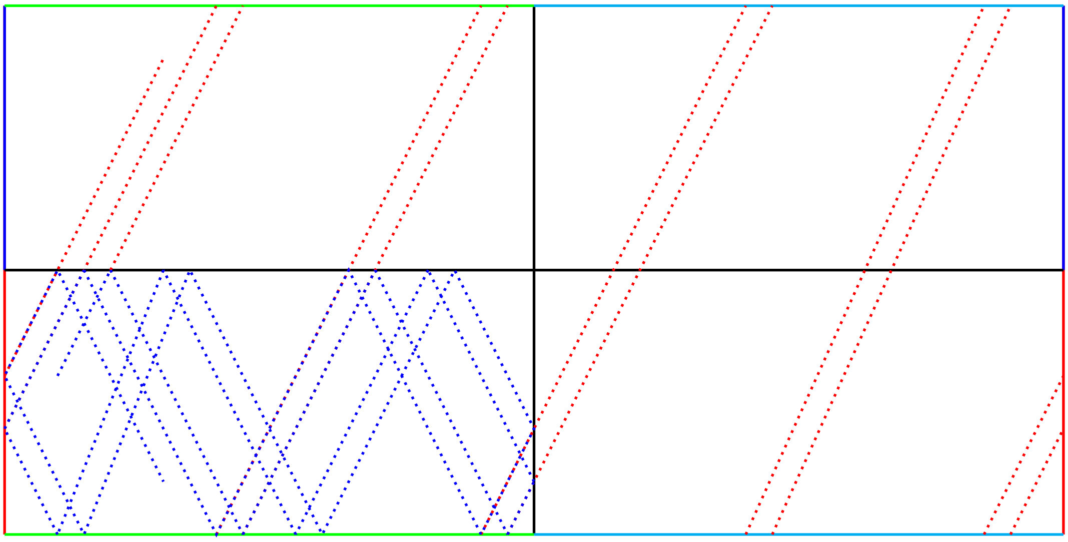

Figure 4 – Trajectoire sur le tore en rouge, dans le rectangle en bleu

Exemple d'un billard circulaire

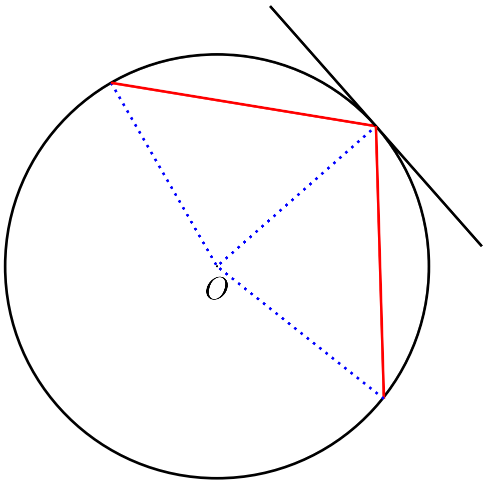

Figure 5 – Un billard circulaire : le premier rebond

On remarque que les triangles OAB et OAC sont égaux, par conséquent la hauteur issue de O est toujours la même, et donc la trajectoire est tangente à un cercle de centre O dont le rayon est cette hauteur (Figure 6).
Remarque : lorsque la trajectoire initiale passe par le centre du cercle, le rebond se fait suivant le diamètre et la trajectoire est un segment.

Exemple d'un billard elliptique

Avec un billard elliptique, les expériences montrent qu'il y a toujours une zone de l'ellipse qui n'est pas atteinte. On peut constater (voir figure 7) que lorsque le premier segment de la trajectoire ne traverse pas le grand axe de l'ellipse (segment reliant les foyers) alors elle ne le traverse plus jamais. Et que si ce premier segment traverse le grand axe, alors tous les autres segments le traverseront.
Montrons maintenant que la trajectoire est tangente à une conique (ellipse homofocale dans le premier cas, hyperbole homofocale dans le second).

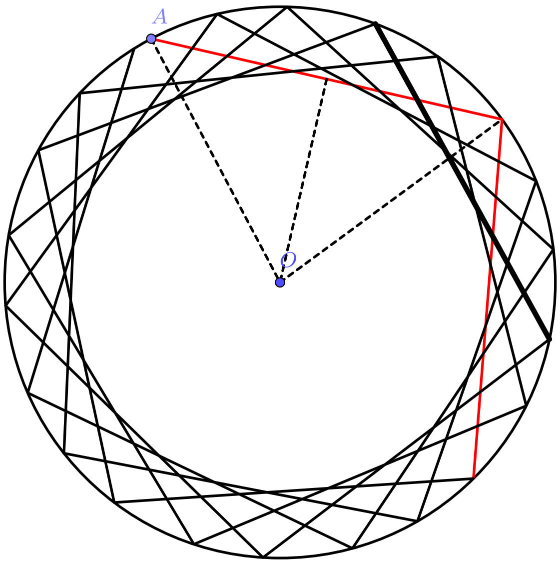

FIGURE 6 – Une trajectoire dans un billard circulaire

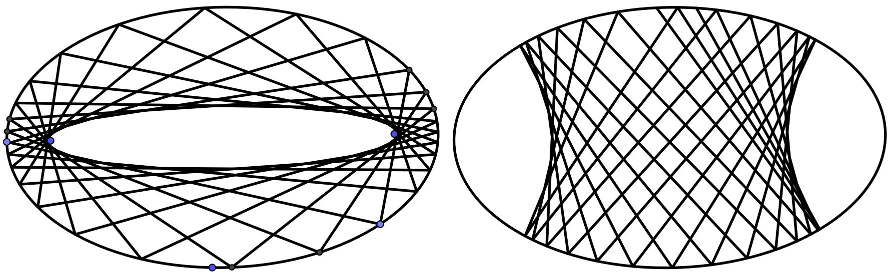

FIGURE 7 – Des trajectoires dans un billard elliptique

Considérons deux segments consécutifs de la trajectoire AB et BC, comme montré sur la figure 8, c'est à dire ne coupant pas le segment $[F_1F_2]$. Considérons :

* le symétrique de F_1 par rapport à (AB) : F_1'.
* le symétrique de F_2 par rapport à (BC) : F_2'.
* $M_1 = (AB) \cap (F_1'F_2)$.
* $M_2 = (BC) \cap (F_1F_2')$.

$F_1M_1 + M_1F_2 = F_1'F_2 = F_1F_2'$ (par symétrie)
$F_1F_2' = F_1M_2 + F_2M_2$
Donc M_1 et M_2 appartiennent à une même ellipse de foyers F_1 et F_2.
Par ailleurs, (AB) (resp. (BC)) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F_1M_1F_2}$ (resp. $\widehat{F_2M_2F_1}$) et est donc la tangente à l'ellipse.
Considérons :

* le symétrique de F_1 par rapport à (AB) : F_1'
* le symétrique de F_2 par rapport à (BC) : F_2'
* $P_1 = (AB) \cap (F_1'F_2)$.
* $P_2 = (BC) \cap (F_1F_2')$.

$P_1F_2 - P_1F_1 = P_1F_2 - P_1F_1' = F_1'F_2$
$P_2F_1 - P_2F_2 = P_2F_1' - P_2F_2 = F_1'F_2$
Donc P_1 et P_2 appartiennent à une même hyperbole. Comme (AB) (resp. (BC)) est la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{F_1P_1F_2}$ (resp. $\widehat{F_2P_2F_1}$), les droites (AB) et $BC)$ sont tangentes en P_1 (resp. P_2) à l'hyperbole.

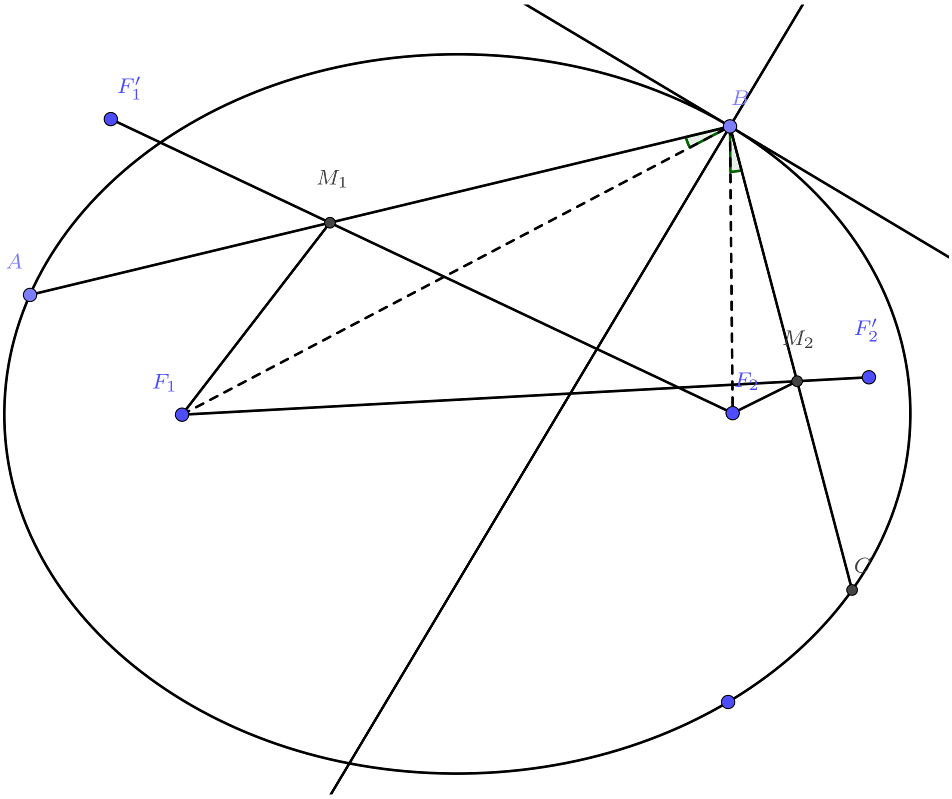

Figure 8 – Deux segments consécutifs de la trajectoire

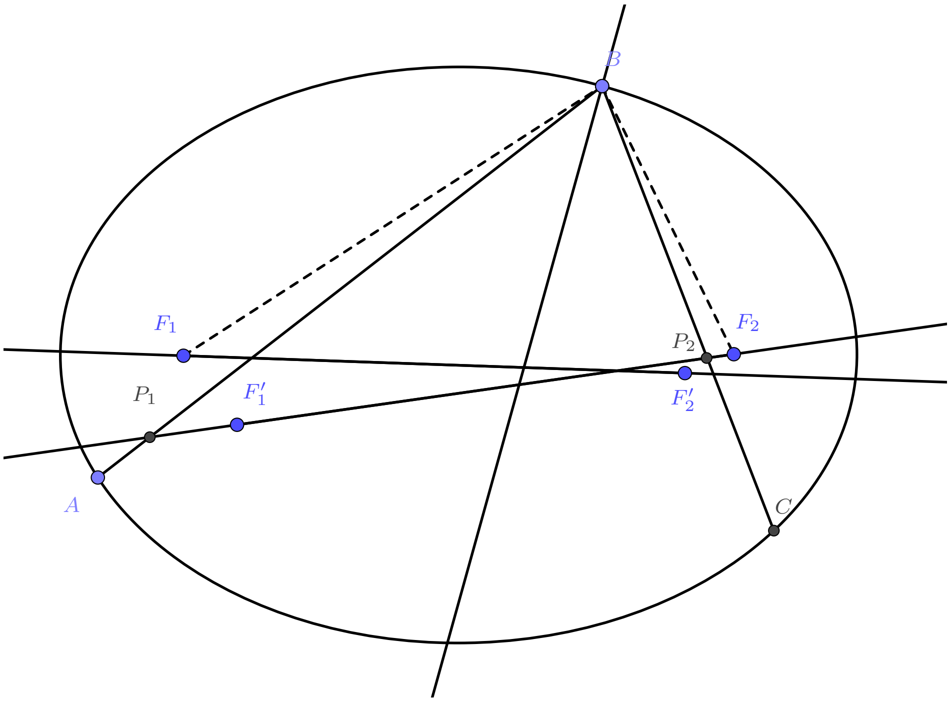

Figure 9 – Tangente à une hyperbole

Billard rectangulaire avec obstacle

Imaginons un billard rectangulaire avec un obstacle circulaire comme montré sur les figures 10 et 11. Ce type de billard est une illustration d'un phénomène chaotique ; en effet, deux trajectoires initialement très proches peuvent devenir très différentes.

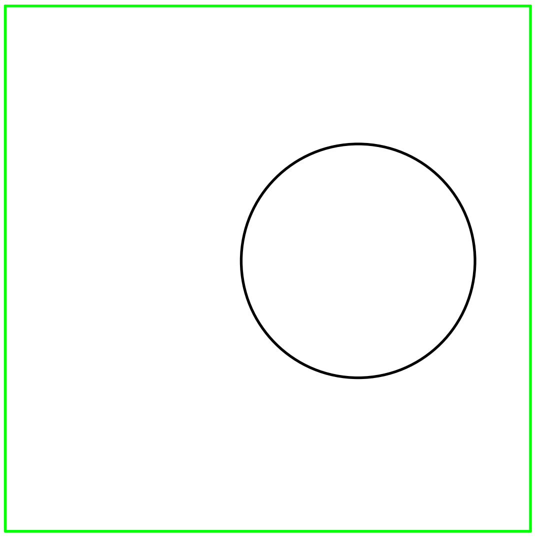

Figure 10 – Un obstacle sur le billard

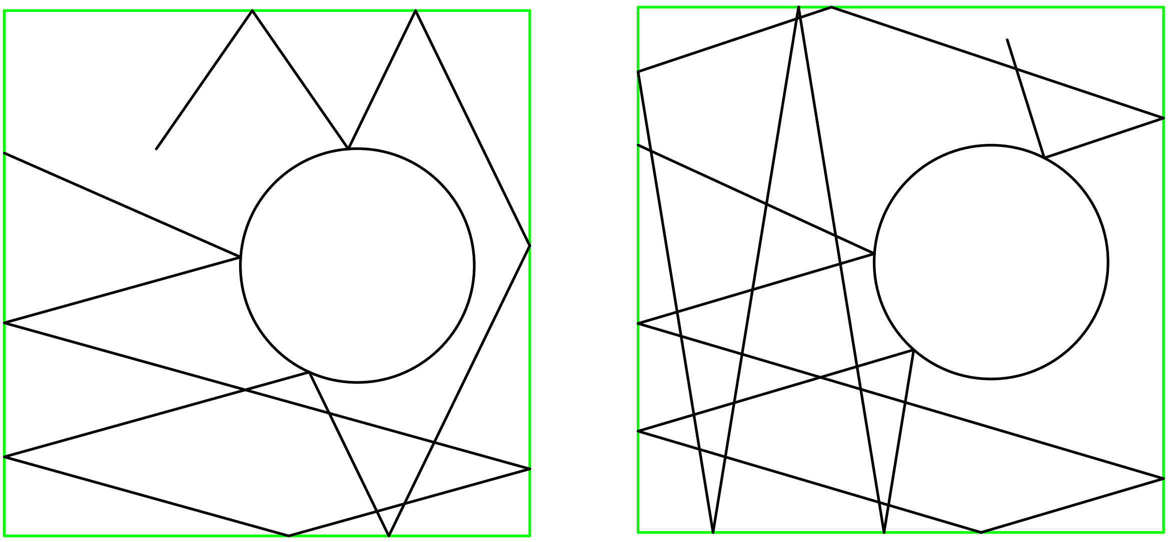

Figure 11 – Deux trajectoires initialement proches

2 Prolongements didactiques

Le problème initial du billard peut donner, comme on vient de le voir, beaucoup de prolongements mathématiques. Suivant le niveau des élèves (ou des étudiants), on peut proposer certains de ces prolongements, par exemple, dans les classes de lycée, parler des trajectoires cycliques et non cycliques en lien avec l'irrationalité des nombres.
Il est également possible de réinvestir les recherches et connaissances acquises des élèves en proposant l'exemple du billard comme triangle équilatéral. En effet, l'idée mise en avant dans le problème initial de paver le plan avec le billard, peut être ici reprise pour imaginer des problèmes.
Dans une perspective d'un travail de recherche sur un temps plus long, il est possible de proposer un travail sur des billards polygonaux (convexes ou réguliers) ; par exemple : est-il possible de

trouver un cycle avec 5 rebonds dans un hexagone ? Quelles conditions sur la direction du premier segment de la trajectoire ? Et pour 11 rebonds ?

3 Quelques liens pour aller (encore) plus loin

Quelques liens pour aller plus loin avec Images des Maths :
http ://images.math.cnrs.fr/Quand-les-matheux-jouent-au.html
http ://images.math.cnrs.fr/Systemes-dynamiques-et-billards.html
http ://images.math.cnrs.fr/Billard-polygonal-et-trajectoires.html