

Le billard
Exemples de mise en œuvre dans la classe

Équipe DREAM

16 juillet 2020

Table des matières

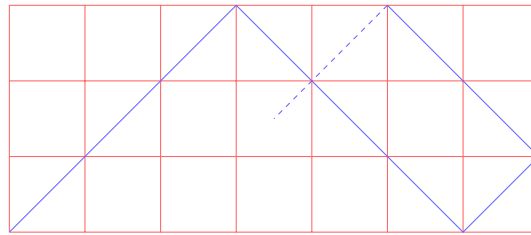
1	Énoncé du problème	2
2	Scénario(s) dans la classe	3
3	Production(s) d'élève(s)	3
4	Comptes rendus (de l'enseignant)	4

1 Énoncé du problème

On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).

Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux "rebondit" sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple :



Question Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction de ses dimensions ?

2 Scénario(s) dans la classe

Séance 1

Temps de présentation des enjeux de la séance - 5 min

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves. Rechercher, émettre des conjectures, faire des essais, prendre des initiatives, argumenter et justifier ...

Temps de familiarisation avec le problème - 5 min

Présentation du problème, lecture et relecture collective de l'énoncé, explication du vocabulaire.

Temps de recherche individuelle - 5 min

Appropriation du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

Temps de travail de groupe - 35 min

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

Séance 2.

Temps de mise en commun et débat - 40 min.

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat..
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés. Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

Temps de synthèse - 10 min

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les points techniques évoqués par les élèves.
- les raisonnements et méthodes utilisés.
- les savoirs mathématiques utilisés

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. A écrire en rouge dans le cahier d'exercice.

Remarque : Il se peut que le problème n'ait pas été résolu. Ce n'est pas grave, on pourra consacrer un autre temps la résolution complète de celui-ci (à donner en DM par exemple).

3 Production(s) d'élève(s)

Voici la liste des conjectures établies par une classe de troisième à l'issue du débat entre élèves à partir des productions.

- le rayon peut toujours sortir du billard

- si la longueur est un multiple de la largeur, le nombre de carreaux traversés est la longueur.
- Sinon, si un des nombres est impair, tous les carreaux sont traversés, sauf pour les multiples (cf conjecture 1), sauf pour les carrés.
- Si les deux nombres sont pairs, le nombre de carreaux traversés est deux fois le plus grand des deux.
- Si c'est un carré, c'est la longueur des côtés.
- Si les deux nombres sont pairs, c'est $\frac{L \times l}{2}$.
- Avec deux côtés pairs, si on les multiplie par deux, le nombre de carreaux traversés est aussi multiplié par deux.
- Si la longueur est le double de la largeur moins 1, tous les carreaux sont traversés.

4 Comptes rendus (de l'enseignant)

Un exemple de séquence d'arithmétique travaillée avec une classe de troisième (la phase de recherche a eu lieu sur deux séances chacune commençant par un rituel d'activité mentale assez long).

Séance 1 et 2 (2 fois 1h) :

travail prévu, objectifs recherche et rédaction d'affiches.

Observation : Le carré est vu par tous. Les discussions sur la parité sont très nombreuses et il y a un essai d'utiliser des agrandissements. Un groupe a proposé une méthode pour générer des nombres premiers entre eux (dernière conjecture).

Séance 3 (1h)

travail prévu, objectifs Présentation des affiches et débat. Elaboration des conjectures de la classe.

Observations : Les élèves se mettent d'accord et retiennent les 8 conjectures mentionnées plus haut. Elles sont inscrites en rouge dans le cahier d'exercices et serviront de base pour la suite du travail. Il y a eu nécessité de faire un point sur le vocabulaire diviseur/multiple en cours de débat.

Séance 4 et 5 (2h la même journée) "développement"

travail prévu et objectifs Le but de cette séance est de faire émerger les notions de diviseur commun , de nombres premiers et premiers entre eux puis de pgcd et ppcm.

Travail autour de la divisibilité (diviseur/multiple, critères de divisibilité). Retour sur les conjectures. Proposition par l'enseignant de billards aux dimensions bien choisies (pour cette classe 9-15 a bien fonctionné) pour faire évoluer les conjectures.

Découverte de la notion de diviseur commun puis de nombres premiers entre eux. si possible pgcd,ppcm.

observations : Les élèves affinent les conjectures en gardant la séparation suivant la parité des dimensions. Le cas 9-15 relance la recherche et les élèves écrivent $\frac{L \times l}{\text{undiviseurdesdeux}}$ pour les cas impairs. Le travail sur les diviseurs communs est arrivé à point nommé. Le réexamen de tous les exemples proposés lors du débat a permis de généraliser la formule pour arriver à la notion de pgcd dans la formule $\frac{L \times l}{\text{pgcd}(L, l)}$ qui est une des solutions du problème. Présentation de la solution par "dépliage" justifiant le travail sur le ppcm.

Séance 6 (1h)

travail prévu, objectifs : travail plus classique : recherche de pgcd et ppcm . Institutionnalisation : distribution de la leçon synthétique(cours d'arithmétique classique).

Observations De nombreux élèves ont compris le cheminement qui a mené à la leçon et la construction de la séquence. Une carte mentale présentée à chaque séance pourrait être utile. Les redoublants ont exposé les techniques de recherche de pgcd et ppcm à la classe en début de séance.

Séance 7 (1h)

Exercices type brevet

Remarques :

Le contenu des séances après le débat a été repensé à chaque heure en prenant en compte le travail et les réactions de la classe pour assurer une continuité de la réflexion. Je me suis demandé à l'issue de chaque séance " et maintenant comment je les fais avancer?". J'ai fait le choix de rester autant que possible dans la résolution du problème avec cette classe en introduisant chaque activité par un lien avec le travail des séances précédentes et avec les conjectures.

Chaque notion rappelée ou travaillée a fait l'objet d'une institutionnalisation succincte en rouge dans le cahier d'exercice (renommé cahier de recherche pour l'occasion) et a été retravaillée immédiatement à la maison par des exercices .