Les pavages archmédiens du plan
Ouverture mathématique, prolongement didactique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

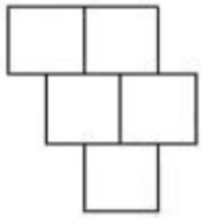
Table des matières

1 Énoncé du problème

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers, sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones.

On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous :



La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.

2 Ouvertures mathématiques

Nous évoquons dans cette partie quelques éléments de généralisation qui permettent d'intégrer la question des pavages archimédiens du plan dans des problématiques plus vastes qui ont une certaine importance dans une perspective didactique. C'est en particulier les différences possibles de configuration autour d'un nœud du pavage que nous développons.
Précisons tout d'abord que nous continuons à ne considérer que des polygones réguliers convexes et des pavages stricts. Ainsi nous n'étudions pas les pavages des figures ci-dessous. Malgré cette restriction, le problème reste ouvert.
Nous sommes maintenant amenés à introduire des pavages tels que ceux des figures 4 et 5 en nous intéressant spécifiquement aux nœuds de tels pavages.
Pour cela nous introduisons deux définitions que nous reprenons de Aslaksen.

> Définition 1 : We will define a tiling to be n-Archimedean if it has n different types of vertices, where the type of a vertex refers to the type and order of polygons surrounding the vertex.

Traduction : Un pavage est n-Archimédien s'il comporte n types de sommets différents, le type de sommet faisant référence au type et à l'ordre des polygones entourant le sommet.
Remarque 1 : Les pavages archimédiens du plan sont alors les pavages 1-archimédiens.
Remarque 2 : On constate que pour un pavage archimédien donné, avec les symétries associées, tous les nœuds sont équivalents. Il est alors assez naturel d'envisager la généralisation suivante :
Définition 2 :

> We will define a tiling to be n-uniform if the group of symmetries of the tiling divide the vertices into n transitivity classes.

Traduction : Un pavage est n-uniforme si le groupe de symétries du pavage divise les sommets en n classes de transitivité.
Sous ces définitions, on a par exemple,

- There are no n-uniform, m-Archimedean tilings where n $<$ m.

- There are no m-Archimedean tilings with $m > 14$.
- There are no 1-Archimedean, n-uniform tilings for $n > 1$.

De façon beaucoup plus générale, les travaux de Chavey, en appui particulièrement sur Kroetenbeerdt, Gruenbaum, avaient déjà permis l'énumération des pavages 2-uniform et 3-uniform. En 2009, Galebach a produit une table (Table 1) donnant les nombres de certains pavages n-uniform, m-archimédien :

	m-Archimedean															
n-uniform	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	> 14	Total
1	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11
2	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
3	0	22	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	61
4	0	33	85	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	151
5	0	74	149	94	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	332
6	0	100	284	187	92	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	673
7	0	?	?	?	?	?	7	0	0	0	0	0	0	0	0	?
8	0	?	?	?	?	?	20	0	0	0	0	0	0	0	0	?
9	0	?	?	?	?	?	?	8	0	0	0	0	0	0	0	?
10	0	?	?	?	?	?	?	27	0	0	0	0	0	0	0	?
11	0	?	?	?	?	?	?	?	1	0	0	0	0	0	0	?
12	0	?	?	?	?	?	?	?	?	0	0	0	0	0	0	?
13	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	0	0	?
14	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	0	?
> 14	0	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	?
Total	11	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞

Table 1: Nombre de pavages pour n et m donnés.

3 Prolongements didactiques - historiques

Nous nous proposons ici d'introduire une dimension historique avec des travaux de Durer sur la question, et quelques éléments sur la piste que suivra Kepler. Ces éléments peuvent être utilisés dans la mise en oeuvre de situations didactiques.

3.1 Dürer

En dehors des très nombreuses œuvres peintes, dessinées et gravées, Albrecht Dürer [1] a produit en particulier des ouvrages de théorisation, dont "Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt" (Instruction sur la manière de mesurer ou Instruction pour la mesure à la règle et au compas).
Nous renvoyons ici au livre de Jeanne Peiffer, qui propose une présentation, traduction de l'*Underweysung der Messung*, assortie de notes, sous le titre *Géométrie*.
L'*Underweysung* est divisé en quatre livres :

> Le premier est presque entièrement consacré à la genèse des courbes : spirales et hélices, coniques, conchoï des, etc. [...] Le livre se termine sur ce qu'il faut bien appeler une théorie des proportions. Le deuxième livre indique la construction des polygones réguliers avec comme application le dessin de rosaces et de pavages. La trissection de l'angle et la quadrature du cercle y sont résolues de façon approchée. Des problèmes de transformation des aires sont abordés. Le troisième livre est nettement moins mathématique que les précédents. Il est consacré à l'architecture [...]. C'est dans ce livre que Durer indique des tracés géométriques (à l'aide du carré et du cercle) pour les lettres de l'alphabet, contribuant ainsi à codifier la forme de certains caractères d'imprimerie (romains et gothiques). A l'instar des *Éléments* euclidiens, le dernier livre est consacré aux solides réguliers et semi-réguliers. Il se termine par un bref exposé des règles de la perspective, qui devait sans doute constituer le couronnement de tout l'ouvrage [...] Géométrie, p.47.

Ainsi Dürer a étudié des pavages réguliers et archimédiens du plan. Après avoir considéré les « planos », figures planes, il s'intéresse aux pavages utilisant des cercles « Si l'on veut utiliser des cercles dans le pavage des sols ou des murs, on pourra les accoler de deux façons. Premièrement par l'intermédiaire de carrés à angles droits, deuxièmement de quadrilatères en forme de losange (Géométrie, p.211) » ; Puis, (Géométrie, p.215), « Maintenant, je souhaite mettre bout à bout quelques figures polygonales, telles qu'elles peuvent servir dans la pavement des sols. »
Dürer propose alors un certain nombre de pavages du plan, stricts ou non, mêlant polygones réguliers ou non, sans que l'on sache toujours si cela a de l'importance pour Durer. On voit ainsi (1) une planche présentant côte à côté le pavage (4,8,8) et un assemblage avec des nœud de type (3,8,3,8) sans que Dürer attire autrement notre attention que par des formules générales sur l'exactitude des constructions :

> En outre, je souhaite assembler des octogones de trois façons différentes. Premièrement je fais en sorte que chaque octogone ait deux côtés et ses sommets en commun avec d'autres. Des triangles subsisteront entre eux. Deuxièmement je les juxtapose en faisant coïncider quatre côtés de chaque octogone avec ceux qui le jouxtent. Si je les empile et les aligne le long de deux droites qui se coupent à angles droits, les espaces résiduels formeront des quadrilatères posés sur une pointe. Troisièmement je les assemble de telle sorte que chaque octogone ait quatre côtés

1. 1471−1528

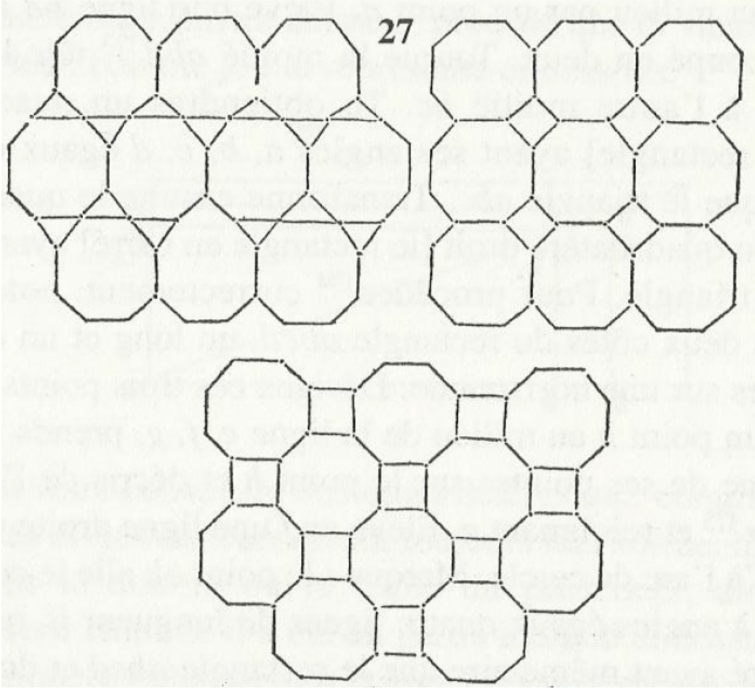


Figure 1: Proposition d'assemblages avec des octogones par Durer

communs avec d'autres, ces côtés étant obliques. Il subsistera entre eux des carrés posés verticalement et dessinant des croix. (Géométrie, p.221)

On observe ainsi une approche de Dürer très fortement axée sur une dimension pragmatique et décorative. On observe aussi ici, entre autre, que Durer se positionne dans un plan avec une direction privilégiée, la verticale, avec une vision très ornementale.
Ces travaux de Dürer montre la modernité de l'homme mais n'en font pas le mathématicien qui permettra l'avancée décisive :

> Cette modernité de Dürer suffit bien à compléter son immense stature en tant que peintre et graveur. Et il semble vain de vouloir le grandir artificiellement en lui attribuant une qualité qu'il ne possédait probablement pas, la qualité de géomètre.

Il semblerait donc que l'état d'esprit de Dürer ne l'ait pas engagé dans une étude mathématique qui permette des avancées plus conséquentes sur les questions qui nous intéressent. Concernant les pavages, son domaine d'expérience des objets polygonaux, son objectif de mettre à « disposition des artistes et des artisans un réservoir de formes avec leurs infinies variations », ne lui permettent pas de produire une structuration mathématique des pavages archimédiens.
Nous retiendrons que Dürer a mis à disposition de ses successeurs un catalogue de formes qui augmentent la familiarité avec les possibles objets de l'expérience. Les pavages (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4), (6,6,6), (3,6,3,6), (4,8,8) font partie de ce catalogue mais aussi des candidats dont le statut est plus ou moins identifié.

On identifie chez Dürer un travail novateur et approfondi sur des objets dont le statut mathématique reste incertain. Ces objets sont issus pour une grande part d'une pratique liée à l'art de l'artisan. Dürer a mis au jour de nombreux objets jusqu'alors non exhibés mais l'approche utilisée n'a permis ni une étude globale aboutie des pavages archimédiens ni même une étude partielle de nature mathématique.
Celui qui fera les avancées du point de vue des mathématiques c'est Kepler. C'est lui qui dans l'Harmonie du monde présentera les 11 pavages archimédiens du plan.

3.2 Kepler

C'est donc par un Livre I entièrement consacré, à la suite d'Euclide, à une classification des grandeurs caractéristiques des figures et à l'élaboration de degrés de connaissance de ces figures, que débute l'*Harmonie du monde*. C'est le livre II qui nous intéresse ici au premier abord. Intitulé plus sobrement dans le corps du texte « De congruentia Figurarum Harmonicarum »(De la congruence des figures harmoniques), c'est un livre de vingt-quatre pages qui traite conjointement des pavages et des polyèdres.
Après avoir expliqué « l'essence Mentale ou « intellectuelle »des Figures régulières », Kepler s'applique à rendre compte de leur « Congruence »ou « Insociabilité ». Nous reprenons ci-dessous les définitions et propositions qui amènent Kepler aux avancées annoncées :

> I. Définition : Une congruence est autre dans une surface, autre dans un solide. Il y a une Congruence dans le Plan, lorsque les angles de plusieurs figures concourent un à un en un point, de sorte qu'aucune ouverture n'est laissée.
> II. Définition : Celle-ci est dite parfaite, lorsque tous les angles de chaque figure concourante concourent selon le même aspect, de telle sorte que tous les assemblages soient semblables entre eux, et que l'ordre des assemblages puisse être continué à l'infini.

Kepler définit ici les pavages archimédiens. Il passe ensuite aux pavages réguliers, puis aux différents cas possibles :

> III. Définition : Elle est dite très parfaite quand encore les figures concourant dans le plan sont de la même espèce.
> IV. Définition : Elle est dite imparfaite, quand certes la plus grande figure est entourée de partout par des contours semblables, et pourtant lorsque la continuation n'est pas donnée à l'infini, ou certes est donnée, mais non sans mélange de concours de diverses espèces. Elle est dite imparfaite de degré inférieur quand la plus grande figure n'est pas propre à concourir en tous les angles par une espèce semblable.

Il apparaît que Kepler maîtrise toutes les conditions nécessaires à l'existence des pavages réguliers et archimédiens.
Les définitions XII et XIII définissent les termes « congrues »et « incongrues ». Kepler énonce ensuite une suite de conditions nécessaires :

> XIV. Proposition : Pas moins de trois des angles des figures planes congruent dans le plan.
> XV. Proposition : Pas moins de trois angles des figures planes congruent ou se dressent pour former un angle solide.
> XVI. Proposition : La somme des angles des congruences dans le plan est toujours de quatre droits ; celle des congruences dans le solide est plus petite que cette somme.
> XVII. Proposition : Une figure d'un nombre impair de côtés dont des figures de deux espèces sont appliquées par les côtés, ne peut se rencontrer dans une forme égale dans tous les angles, soit dans un plan soit dans un solide.

Dans les propositions XVIII à XXI, Kepler, par une étude de tous les cas possibles, exhibe les onze pavages archimédiens du plan.

> XVIII. Proposition : Seulement Trois surfaces planes de la même figure emplissent très parfaitement un lieu plan, six Triangles à la fois, quatre Carrés à la fois, trois Hexagones à la fois.

> XIX. Proposition : Un lieu plan est empli six fois à partir des surfaces planes de deux figures ; deux fois à partir de cinq, une fois à partir de quatre, trois fois à partir de trois angles.
>
> XX. Proposition : Un lieu plan est empli congruement quatre fois à partir d'angles plans de trois espèces.
>
> XXI. Proposition : Les figures planes de quatre ou de plus d'espèces ne congruent pas avec les angles un à un, pour emplir le lieu entier.

Kepler procède par exhaustion des cas en considérant le nombre d'espèces différentes de polygones présents autour d'un nœud. Par exemple dans la proposition XXI, il indique qu'il n'est pas possible d'avoir quatre ou plus d'espèces présentes. En effet, avec un minimum de quatre polygones, la somme des angles minimale serait déjà supérieure à quatre droits. Et pour la proposition XIX, par exemple, il s'agit de comprendre que Kepler traite le cas où l'on ne considère que des figures de deux espèces différentes.