Pavages archimédiens du plan
Analyse didactique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

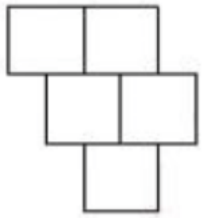
Table des matières

1 Énoncé du problème

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers, sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones.

On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous :



La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.

2 Variables de la situation

Il est possible pour des élèves de petites classes de limiter le nombre de type de polygones différents, par exemple en se restreignant à une recherche avec des triangles, des carrés, des hexagones, des octogones. Ceci étant dit, pour l'étude de la situation dans toute sa généralité, les données de l'énoncé ne peuvent être modifiées. Par contre il est possible de considérer des variables matérielles.
On retient ici les variables suivantes en sus de l'environnement papier-crayon :

- mise à disposition d'instruments de géométrie : règle, compas, équerre, rapporteur.
- mise à disposition de papier quadrillé, blanc, coloré, de ciseaux.
- mise à disposition de matériel, type polygones en plastique ou en papier.
- mise à disposition de ressources documentaires : cours, manuels, internet.
- mise en œuvre dans un environnement numérique (calculatrice, logiciel de géométrie dynamique, tableur, logiciel de calcul formel, logiciel de mise en œuvre d'algorithmes, ...) sous des modalités diverses : accès permanent, structuré mais libre, avec une organisation imposée, ...

Les instruments de géométrie sont des outils familiers dans les institutions considérées. Leur disponibilité est naturelle. Leur usage oriente initialement l'activité dans le cadre d'une géométrie I et permet par exemple des mesures et des identifications d'angles. Nous avons observé que cette géométrie instrumentée, en appui sur des constructions de figures et/ou la création de polygones sensibles permet l'élaboration de conjectures et l'engagement dans la création d'une théorie. Elle permet aussi parfois la mise à l'épreuve de la théorie dans des phases plus avancées. Ici, leur usage doit toutefois être dépassé dans des phases de validation dans le cadre de la théorie.
La question de l'usage de papier et de ciseaux rejoint celle de la création de polygones sensibles, création par le sujet et donc dans un cadre théorique déjà présent. La mise à disposition de polygones en papier, déjà découpés, colorés suivant le type de polygone ou de matériel de même type en plastique revêt une autre dimension. Par cette mise à disposition, la manipulation est

facilitée, voire valorisée, mais une part de la mathématisation est alors à réaliser. Si l'étude globale peut être facilitée, l'étude locale peut elle, être complexifiée.
La problématique de la mise à disposition de ressources issues d'internet n'est pas étudiée ici.
Concernant les autres instrumentations (calculatrice, logiciel de géométrie dynamique, tableur, logiciel de calcul formel, logiciel de mise en œuvre d'algorithmes, ...) : la calculatrice a trouvé toute sa place dans les milieux objectifs de toutes nos expérimentations préalables. Elle ne pallie pas toutes les maladresses dans le registre numérique, mais peut faciliter l'entrée dans ce registre pour les sujets qui ne s'y engageraient pas sans.
L'usage du LGD est particulièrement approprié pour la validation ou l'invalidation de candidats-pavages aussi bien au niveau local que global, mais là encore avec le cadre théorique nécessaire. Le LGD ne se confirme être qu'un outil au service d'une pensée et, en tant que boîte noire particulièrement concernant les angles, ne favorise que modérément les phases heuristiques.

3 Connaissances et capacités en jeu

Il est bien évident que les objets potentiellement en jeu le sont relativement aux sujets acteurs de la recherche et dans ce cadre un grand nombre d'objets, pour autant qu'ils soient suffisamment familiers aux sujets ou qu'ils le deviennent, peuvent apparaître. Il n'est par exemple pas impossible que des outils de la théorie des groupes puissent être mobilisés par des spécialistes de la question. Nous n'évoquerons pas ici de tels outils.

3.1 Les polygones

Ils apparaissent parmi les objets centraux.

- Les polygones non réguliers : Ils peuvent apparaître dès les premières recherches et en particulier lors de la mobilisation des objets familiers (rectangles, losanges, ...).
- Les polygones réguliers : Ce sont les premiers objets à manipuler. De l'acquisition d'une certaine maîtrise à leur sujet, antérieure à la recherche ou pendant la recherche, dépendra certainement l'avancée de la recherche sur les pavages archimédiens.
  - le triangle équilatéral, le carré : ces deux polygones sont particulièrement classiques. On peut s'attendre à une bonne maîtrise de ces objets.
  - l'hexagone : souvent rencontré, son étude approfondie est néanmoins peu fréquente [1].
  - l'octogone, le pentagone, l'heptagone : l'octogone peut apparaître plus familier, les pentagones et heptagones moins.
  - les n-gones pour n supérieurs à 9.
  - les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas [2].
  - les polygones réguliers dont la mesure de l'angle en degré est entière, c'est-à-dire tels que $\dfrac{360}{n}$ soit entier.

1. Aucune connaissance n'est exigible à son propos au lycée en France. L'approche des nombres complexes dans les programmes de TS peut éventuellement se prêter à un travail sur les racines de l'unité mais aucune connaissance systématisée n'est exigible.
2. Ce n'est plus un élément du curriculum dans le second degré. Sa dernière apparition remonte aux programmes de spécialité mathématiques en première et terminale L qui se sont éteints respectivement en juin 2004 et juin 2005.

3.2 Les angles

Il est à noter que dans un assemblage, les angles peuvent être associés soit à un angle de polygone soit à un « trou » : dans ce dernier cas la perception peut être plus difficile ;
Sont à considérer :

- l'angle plein : mais est-il toujours perçu comme un angle ? À la limite de la perception comme angle déterminé par deux demi-droites, nous ne sommes pas certains qu'il puisse réellement être perçu par tous comme un objet à part entière. Il reste à questionner si son utilisation au moins « en actes » peut être effective,
- l'angle plat : dans le problème posé l'angle plat peut intervenir par exemple comme angle limite de deux polygones convexes dont l'association autour d'un nœud recouvrirait le plan ;
- l'angle droit : plusieurs conceptions peuvent cohabiter. Celle qui apparaît la plus pertinente ici est celle de l'angle obtenu quand on cherche à former à partir de l'angle plein quatre angles égaux ;
- les angles des polygones : il est à noter que leur reconnaissance pourra être contrariée dans les associations de polygones de longueurs de côtés différentes ;
- les mesures de ces angles, avec ou sans unité de mesure, en portion de l'angle plat, de l'angle droit : la familiarité avec ces mesures est sans aucun doute un point clé.

3.3 Les nombres

La recherche amène la manipulation de nombres. Si ces objets sont naturalisés chez des chercheurs, il n'en est pas de même pour des non experts. La question de savoir si les objets suivants sont non seulement mobilisables mais également familiers est importante :

- les multiples de 30, 90, 120 ; les multiples des mesures des angles des polygones réguliers ;
- les diviseurs de 360 ... qui permettent d'obtenir des angles polygonaux entiers ;
- les valeurs entières, décimales non entières, rationnelles non décimales des angles ou de leurs mesures ;
- les décompositions additives de 360.

3.4 Les fractions et les relations de la forme $\sum$ 1/n = k/2 - 1

Des développements syntaxiques peuvent amener à la manipulation de fractions égyptiennes, de sommes de telles fractions et de leurs comparaisons à des nombres de la forme $\frac{k}{2} - 1$, pour $k \in [3; 6]$.

3.5 Les pavages

Au delà des assemblages, la pratique des puzzles, initiée précocement à l'école, rend relativement familière la notion de recouvrement d'un domaine plan par des « pièces » identiques ou non. Pour autant, dans la situation considérée, il sera nécessaire d'envisager que la réalisation d'un assemblage autour d'un nœud n'est pas suffisante et que la réussite globale ne va pas de soi. Dans ce cadre, l'objet « plan » est, lui aussi, à questionner.

- Les pavages réguliers : la familiarité culturelle dont ils font l'objet peut laisser envisager que ces objets, non seulement apparaissent, mais qu'ils permettent l'élaboration des premiers éléments de la théorie. Il peut toutefois s'avérer que les pavages réguliers soient perçus dans leur globalité et non comme des assemblages, ce qui rend plus difficile le repérage des propriétés.

- Les pavages archimédiens : Ils sont l'« objet » de la recherche, ils fondent cette recherche. Ils n'en sont pas pour autant le but ultime, non seulement parce que du point de vue mathématique la recherche peut se prolonger plus avant dans l'étude des pavages, mais également parce qu'il est fort probable qu'indépendamment de toute difficulté de conceptualisation la situation ne permette pas d'aller au bout de la recherche.
- Les pavages moins réguliers : Il est envisageable non seulement que des pavages avec des tuiles non régulières apparaissent, mais également que des pavages à tuiles polygonales régulières mais non archimédiens soient mis à jour, discutés.

4 Procédure(s) élèves

4.1 Les essais initiaux

a. Des essais plus ou moins systématiques sur les pavages monoédraux devraient apparaitre ;

   Ces essais sont faciles à mener pour les pavages avec des triangles, des carrés, des hexagones. Ils peuvent s'appuyer sur des connaissances bien ancrées sur les premiers polygones réguliers, se faire par des tracés à la règle et au compas, ou l'utilisation de papier quadrillé. Ils sont plus difficiles à mettre en œuvre avec des octogones, des pentagones et particulièrement des heptagones ...

   Pour les figures plus longues à construire, on peut envisager l'utilisation de gabarits découpés dans du papier.

   Les premières procédures numériques peuvent apparaitre, avec détermination de l'angle des polygones réguliers, la validation pouvant se faire ensuite pour les pavages par :
   - le tracé de polygones réguliers utilisant le rapporteur,
   - le calcul.

   Il n'est pas exclu que les premiers essais initiaux soient immédiatement numériques pour les chercheurs les plus familiers avec les polygones.

b. Des essais plus ou moins organisés combinant deux types de polygones réguliers différents.

   Ces essais sont là encore relativement simples s'ils utilisent des triangles, des carrés, des hexagones.

c. Des essais plus ou moins organisés combinant plusieurs types de polygones réguliers différents.

   L'utilisation de plus de deux types de polygones différents peut aussi intervenir par l'observation des compléments nécessaires, par exemple après l'utilisation des hexagones et des carrés.

4.2 Les premières étapes dans l'élaboration de théories locales au niveau des assemblages

Certaines observations répétées peuvent amener à l'élaboration de premières conjectures, de premiers tests, de certaines preuves ... concernant :

a. L'égalité des longueurs des côtés des polygones réguliers intervenant dans un même pavage.

b. La valeur de la somme des angles des polygones constituant un assemblage autour d'un sommet.

Le fait que cette somme vaille 360 peut relever pour certains de l'évidence qui n'a pas à être énoncée, pour d'autres du résultat de l'étude d'une condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas de trou.

4.3 Étude d'une condition nécessaire à la construction d'un nœud d'un pavage potentiel

Il s'agit d'aller au delà des deux conditions évoquées ci-dessus. Il est à noter que cette étude relève d'une difficulté multiple :

- une centration sur un élément local de l'objet étudié,
- un changement de registre nécessaire, du dessin au numérique, pour les cas non triviaux,
- l'engagement dans une procédure d'analyse par condition nécessaire,
- la projection dans une démarche oú des caractéristiques des polygones réguliers vont s'avérer nécessaires alors qu'elles ne sont peut-être pas disponibles.

Elle peut se mettre en place sur les premiers essais, par exemple par l'étude du complément à 360 lorsqu'on assemble deux polygones réguliers de même type.
Une étude formalisée et systématisée peut donner des pistes pour des avancées conséquentes.

4.4 Les essais de validation globale des pavages

Engager des validations globales pour les pavages à ce moment là de la recherche n'est sans doute pas le plus simple car les candidats sont encore très nombreux. Pour autant la question se pose pour ceux qui ont obtenu des premiers assemblages. Il s'agit de construire une structure dans les assemblages successifs qui convaincra que le pavage global est possible.
Ces constructions sont quasiment inutiles pour certains candidats, mais peuvent s'avérer laborieuses et fastidieuses sans outils de dessin assisté. Elles peuvent être facilitées par l'utilisation de gabarits.
Elles peuvent aussi amener à la découverte de pavages moins réguliers que les pavages archimédiens.
Et il est clair qu'une étude par analyse-synthèse efficace facilitera cette phase.
Par ailleurs, l'étude conjointe du trajet autour d'un polygone et des nœuds rencontrés, qui doivent tous être semblables, peut permettre de simplifier la démarche.

4.5 Les procédures engageant dans des études plus systématiques

Les étapes à franchir sont là encore multiples, il s'agit :

- d'avoir une familiarité avec les éléments précédemment établis, et en particulier la condition nécessaire portant sur les angles adjacents d'un assemblage et la mesure de l'angle d'un polygone régulier à n cotés, pour n assez grand,
- d'accepter l'utilisation du registre numérique et l'éloignement temporaire du registre graphique,
- de s'engager dans une recherche avec une volonté d'exhaustivité,
- d'élaborer la démarche structurée qui permettra d'avancer.

Lors de l'élaboration de cette démarche, la question importante reste celle de la nécessité du plus ou moins grand recours aux objets « concrets » précédemment côtoyés ... l'abstrait devenu familier.
Les pistes qui peuvent être explorées :

a. Organiser la recherche suivant le nombre de types de polygones réguliers différents, et faire une étude exhaustive à l'intérieur de cette typologie en maximisant le nombre de polygones en commençant par les triangles, puis les carrés ...

b. Celle utilisant un arbre. La recherche de l'exhaustivité se fait alors par la recherche de tous les cas possibles utilisant :

- un, puis deux, trois, quatre, cinq et six triangles équilatéraux

- ensuite aucun triangle, mais un puis deux, trois et quatre carrés

- ...

On peut noter que l'utilisation d'un tableur facilite l'organisation des calculs et qu'un logiciel de géométrie dynamique aide à la validation des candidats-pavages.

c. Pour les chercheurs qui aboutiront à des expressions de la forme $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$ par exemple, un engagement supplémentaire sera à réaliser. Cette situation a été particulièrement étudiée par le groupe EXPRIME et a fait l'objet d'un grand nombre d'expérimentations.

5 Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)

- La réduction à un seul type de polygone par pavage. Obstacle à la compréhension générale du probléme mais possiblement domaine d'expérience permettant le développement d'outils pour la suite de la recherche.
- Manque de familiarité avec les objets polygones, angles des polygones, diviseurs d'un entier, ... mais la situation peremt aussi par ses nombreuses rétroactions de (re)travailler ces objets.
- Difficulté à borner le domaine de la recherche. Cet élément est essentiel pour obtenir l'exhaustivité ...