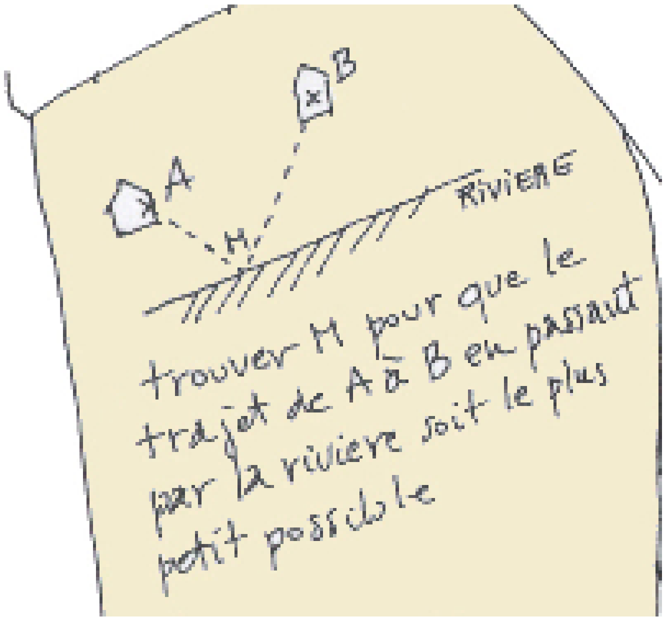
La rivière
Ouverture mathématique, prolongement didactique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

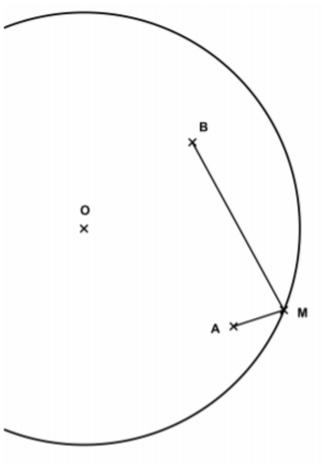
Table des matières

1 Énoncé du problème



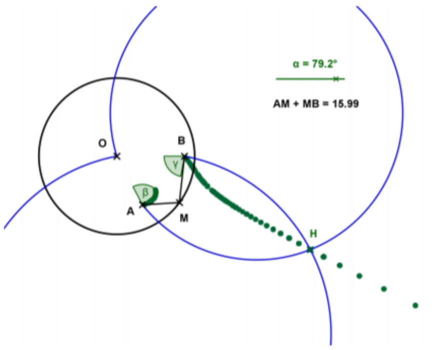
2 Ouvertures mathématiques

2.1 La rivière est un arc de cercle

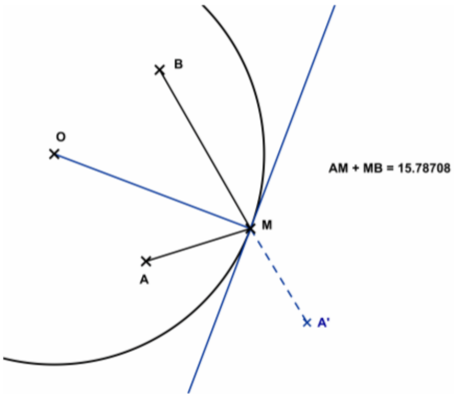


Pour déterminer le point cherché, on s'intéressera ici au chemin de lumière, c'est à dire on cherchera les points du cercle tels que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion ; la première solution utilise les arcs capables et la deuxième les tangentes ; on verra que cette deuxième solution peut se généraliser aux courbes des fonctions dérivables.

Rayon de lumière :



Réflexion :



2.2 La rivière est la courbe d'une fonction dérivable

Données :

$A := [x_A, y_A] : B := [x_B, y_B] : M := [x_M, f(x_M)]$

$t := y - f(x_M) = df(x_M) * (x - x_M)$
la tangente à la courbe de f en M ; (df représente la dérivée de f)

$n := x - x_A + df(x_M) * (y - y_A) = 0$
la droite passant par A et perpendiculaire à t

On cherche les coordonnées du symétrique de A par rapport à t

Première étape : point d'intersection de t et n :

$$x = \frac{x_A - df(x_M)f(x_M) + df(x_M)^2 x_M + df(x_M)y_A}{1 + df(x_M)^2}$$

$$y = \frac{df(x_M)^2 y_A + f(x_M) + df(x_M)x_A - df(x_M)x_M}{1 + df(x_M)^2}$$

Deuxième étape : le lieu des points A' est paramétré par x_M :

$$x_{A'} = \frac{-x_A + 2\left(x_A - df(x_M)f(x_M) + df(x_M)^2 x_M + df(x_M) y_A\right)}{1 + df(x_M)^2}$$

$$y_{A'} = \frac{-y_A + 2(df(x_M)^2 * y_A + f(x_M) + df(x_M)x_A - df(x_M)x_M)}{1 + df(x_M)^2}$$

Une condition d'alignement s'exprime alors comme suit :

$$\begin{vmatrix} x_B - x_M & x_{A'} - x_B \\ y_B - f(x_M) & y_{A'} - y_B \end{vmatrix} = 0$$

dont l'expression est rapidement compliquée, mÃªme avec des fonctions simples, comme on peut le voir dans la suite avec : $A(0;0), B(1;2), f(x) = x^2 - 1$
on obtient le paramétrage du lieu de A' :

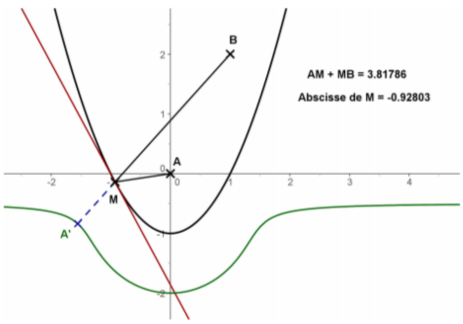
$$x = \frac{2\left(-2x_M\left((x_M)^2 - 1\right) + 4(x_M)^3\right)}{1 + 4(x_M)^2}$$

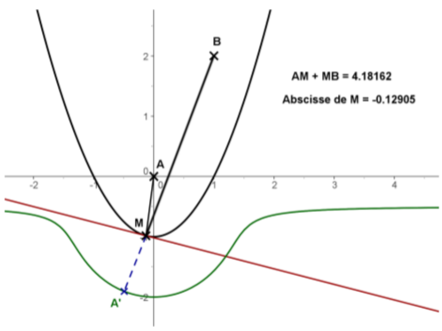
$$y = \frac{2\left(-(x_M)^2 - 1\right)}{1 + 4(x_M)^2}$$

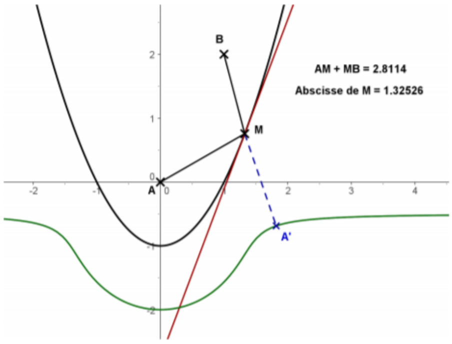
La condition d'alignement des trois points amène à résoudre une équation de degré 5 :

$$4x^5 - 4x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x - 1 = 0$$

Les solutions réelles en valeur approchée :
-0.1236921642 ; -0.9265695282 ; 1.362145219 correspondent aux positions sur les trois dessins :







2.3 La rivière coule sur une sphère

3 Prolongements didactiques

Et si la rivière était un arc d'ellipse ?