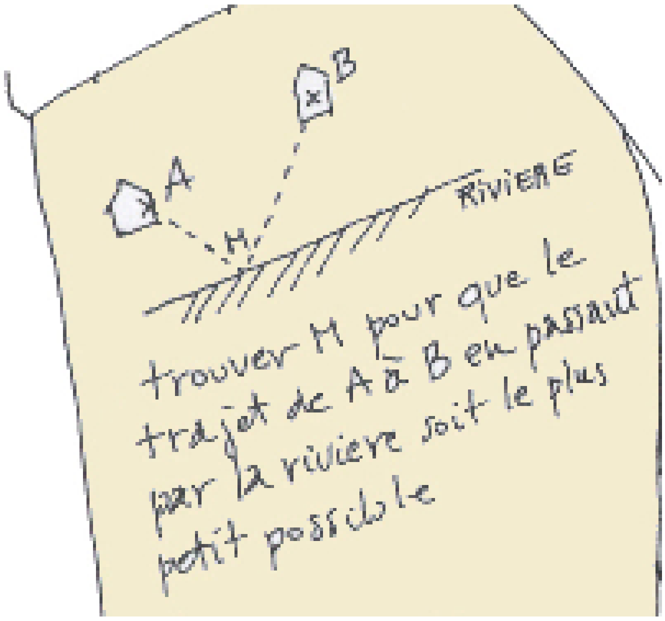
La rivière
Analyse didactique

Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème



2 Variables de la situation

Il est à noter qu'une situation proche pourrait être proposée avec un ruisseau facilement franchissable et deux points de départ, chacun de chaque côté de la rivière. Cette situation bien que proche mathématiquement et utilisable pour travailler les trajets de plus courte distance, perd une grande partie de son aspect recherche de problème.
Les procédures observées permettent de mettre en évidence plusieurs variables. On note D la droite modélisant le bord de la rivière.

- Le positionnement de D près du bord inférieur de la feuille ne facilite pas le passage au symétrique
- L'égalité de distance des ponts A et B à D. Cette égalité incite à conjecturer une position du point M minimisant le trajet comme milieu des projetés de A et B sur D.
- Des points A et B proches de D rendent moins pertinentes les procédures utilisant le mesurage des longueurs
- Une droite D, "horizontale", facilite le tracé de perpendiculaires à D, et potentiellement l'apparition de triangles rectangles et l'utilisation du théorème de Pythagore
- Une droite D, "horizontale", facilite également l'utilisation d'un repère orthogonal.
- L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique facilite la réalisation d'exemples et le test des conjectures
- La calculatrice peut faciliter les procédures utilisant la trigonométrie, l'utilisation d'une fonction, ...

3 Connaissances et capacités en jeu

- Distance d'un point à une droite
- Construire le symétrique d'un point par rapport à une droite
- Distance sur une ligne brisée
- Inégalité triangulaire

- Configuration de Thalès
- Relation entre position de M et distance
- Existence du minimum
- Aspect fonctionnel
- ...

4 Procédure(s) élèves

- Tracé de perpendiculaires pour trouver le plus court chemin de chaque maison à la rivière, tracé d'un trajet A - point le plus proche de A sur la rivière - bord de rivière - point le plus proche de B sur la rivière - B.
- Éssais plus ou moins organisés :
  - tracé d'un segment [AB], sans passer par la rivière
  - placement du point K approximativement (ou exactement) à l'intersection de la rivière et de la médiatrice de [AB].
  - essais organisés ou non de placement du point K, mesurage et réajustement vers une position optimale.
- Utilisation de A' ou de B' symétriques de A ou B.
- Utilisation d'un repère et d'une fonction

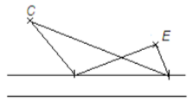
4.1 Transcription du travail d'un groupe en première S

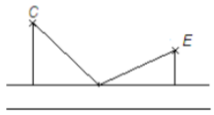
Dans la suite, le professeur est désigné par JL.

1. **Présentation Générale**
   (a) Date : 14/01/2008
   (b) Classe : première S
   (c) Type de séance : recherche de problème ; « le cavalier »
   (d) Heure début, heure fin : 10h-11h en classe entière ;
   (e) Nombre d'élèves :
   (f) Organisation de la classe : travail de groupes ; observation de deux groupes de quatre élèves et de trois élèves.
   (g) Contexte (ce qui a été traité avant) : étude de fonctions, notion de nombre dérivé, de fonctions dérivée ; barycentres.
   (h) Objectifs instrumentaux : applications géométrie & graphique : construction de points libres, intersection, point sur objet, droites, segments, perpendiculaires, et déplacement de points.
   (i) Objectifs mathématiques : à un niveau méta-mathématique, mise en place d'heuristiques, de raisonnements

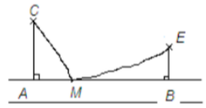
   au niveau mathématique : propriété de la symétrie axiale, bissectrice et mesure d'angles ; mesure de distances, utilisation de la notion de fonction, organisation des données.
   (j) Objet de l'observation : deux groupes d'élèves
2. **Déroulement bref de la séance avec la durée des différentes phases**

Séance de recherche de problème

Actions élève(s)	**Actions professeur collectives**	**Actions professeur élève ou groupe**	**Temps précis**
S'installent	Distribution de la feuille d'énoncé		10h08
Les élèves lisent l'énoncé E2 Ça sera toujours la même E1 Ben oui, ça fait toujours la même distance... E2 Je mets M là et M là... E2 mesure en plaçant deux points comme indiqué  E2 9,1... 5,9 E3 Vous faites quoi ? E1 C'est juste pour voir si c'est les mêmes les distances E2 15, et là ? E2 11,2... et 2,5 : 13,7 ; Ben E1 L'autre ça faisait quoi ? E2 15 E1 Ben c'est pas du tout... E2 On le met là entre les deux *il mesure* 10,4... 2,8 E1 13,2 E2 Et l'autre, c'était combien ? E1 13,7 E2 Ah ouais ! Chacun repart sur l'examen de son énoncé et dans les mesures des longueurs E2 Et là 5,8 et 7,6... 13,4... C'est entre là et là. *Il note les mesures sur le dessin et hachure la partie indiquée*... C'était combien là E1 13,7 E2 Et là 13,4 ; c'était plus court là alors...			

E1 Pour l'instant c'est là... E2 Faut chercher entre les deux... Faut trouver une équation E1 Où ça ? E3 Diviser par deux ça fait 5 ; même chose là ; ça fait 12,8  E1 M il est entre là et là (*les pieds des perpendiculaires*) ; pourquoi j'ai cherché ici moi ? E3 à 6cm c'est 13,2 ; à 4cm c'est 13,6 *E2 place plusieurs points et mesure* E1 Là, ça fait un angle droit ? E2 Ah ouais, c'est pas con ! *il trace des marques d'angle droit sur tous les chemins tracés* E3 Eux ils ont fait un truc avec des poids ... E1 Là, il y a combien de hauteur ? *E2 dessine sur sa feuille en utilisant une réquerre les perpendiculaires à la rivière passant par C et E* On va faire des perpendiculaires parfaites... ça fait 10,2... Donc ton 12,8 il est faux... E1 Là ça fera toujours deux triangles rectangles ; quoi que tu fasses ça fera toujours deux triangles rectangles... Donc ça et ça en fonction de ça E2 Faut additionner ; ce que j'ai fait ça sert à rien : il gomme tous les chemins tracés sur sa feuille			10h25

E1 écrit sur sa feuille : $CM^2 = CO^2 + OM^2$ *puis modifie les notations sur son énoncé :*



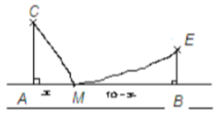
Il écrit alors :

$$CM^2 = CA^2 + AM^2$$

$$ME^2 = MB^2 + BE^2$$

$CM^2 + ME^2 = CA^2 + AM^2 + MB^2 + BE^2$

E2 ça c'est x, ça c'est 10-x *E1 note sur le dessin :*



E1 *il mesure* CA ça fait 5,7 ; et BE 2,4 *calcule avec sa calculatrice puis écrit au dos de la feuille d'énoncé :*
$CA^2 + AM^2 + MB^2 + BE^2 = 32,49 + x^2 + (10-x)^2 + 5,76 = x^2 + 100 - 20x + x^2 + 38,25 = 2x^2 - 20x + 138,25$
E2 Tu fais avec les vecteurs ?
E1 Non, c'est juste le théorème de Pythagore.
E2 Pourquoi t'ajoutes tous les carrés ?
E1 C'est ça au carré plus ça au carré plus ça au carré, plus ça au carré.
Pendant ce temps, E3 et E4 continuent à mesurer sur la feuille
E3 Ils peuvent être n'importe où les triangles ; ils peuvent être là...
E1 Ils vont varier en fonction de x ; en fonction de x, ça permettra ; pis tu fais la dérivée
E2 Quand t'as ça tu fais la dérivée après ?
E4 T'as quoi comme fonction ? C'est quoi ta fonction pour que tu calcules la dérivée ?
E1 C'est la distance... Mais c'est au carré... Faut prendre la racine *Il note sur sa feuille un symbole racine dans la ligne d'écriture :* $\cdots + (10-x)^2 + 5,76 = \sqrt{x^2 + 100 - 20x + x^2 + 38,25} = \sqrt{2x^2 - 20x + 138,25}$

E2 Ben là on a une méthode... On lui demande... E4 C'est quoi notre méthode ? E2 On a une méthode. E1 Ben oui... E3 Là tu calcules la dérivée de ça ? E1 Oui, je pense ; mais là c'est racine... *Il écrit :* $2 \times 2x$ $4x - 20$ $x = \frac{20}{4} = 5$ ça fait $x = 5$; oui mais c'est la racine $\sqrt{5}$ c'est 2,2 (*calcule avec la machine*) E2 Bon, on demande... M'sieur !		JL Je vais récupérer vos machines, transférer le fichier ; il en manque une ? E2 Oui, je l'ai oublié... E2 Je prends quoi ? JL Voilà : sur le document il y a un point qui vous indique la solution. Vous allez voir si votre méthode fonctionne... Une petite fiche qui va vous permettre de manipuler le document. Il s'appelle cavalier2 ;	10h32
E2 *Il lit :* Le point S qui est la solution du problème. Construire le point M sur la droite d... Menu 6-2... E1 Oui mais je fais quoi ? E2 Alors construire le point M... E1 Oui mais c'est géométrique...			

E2 $\sqrt{5}$ c'est 2,2... ça fait ici. E1 Oui mais c'est de l'autre cÃ´té ; ils disent que ça fait ici *Il montre l'écran* *E2 refait le dessin sur le papier mais en prenant 2,2 pour 10-x*			
		JL Vous avez pu valider ou pas ? E1 Non nous on n'a pas fait géométriquement JL Mais vos mesures vous ne pouvez pas les prendre sur la figure pour voir si ça fonctionne. Vous avez fait des calculs avec des longueurs ? E1 Ouais JL Et vous savez pas faire afficher des longueurs sur la machine ? Vous pouvez essayer de vérifier avec des longueurs ; quelles longueurs il faudrait que vous affichiez ? E1 là et là JL Et bien alors vous pouvez faire afficher ces longueurs et modifier les points pour que ça corresponde pour voir si ça fonctionne ce que vous avez déterminé par le calcul. Hein ?	10h37
E1 et E2 décrochent un peu. E3 et E4 construisent un point M et mesurent sur la machine.		JL revient : Alors est-ce que ça marche ? Vous savez mesurer des longueurs ?	10h48

E2 Il n'y a pas d'axe... Il est à 5 je crois... E1 Racine de 5 E2 Mais sur le truc là c'est pas 5 E1 J'en sais rien...Je suis pas sûr E2 Pas sûr de quoi ? E1 C'est la racine ? E4 M'sieur ! J'arrive pas à sélectionner les segments.		JL explique la procédure pour faire calculer la somme de deux longueurs sur la calculatrice et distribue la fiche technique. Pendant ce temps, E1 et E2 se débattent avec les racines carrées... JL signale le problème et demande aux élèves de bien faire attention à ce qu'ils calculent.	10h50
E1 fait le dessin d'un triangle ABC rectangle en B ; il écrit : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $AC = \sqrt{}$. Ah si, t'as raison... *Il écrit :* $CM = \sqrt{CA^2 + AM^2}$ E2 Ce que je ne comprends pas, c'est que ça fait $CA + AM$; donc j'ai raison... E1 *écrit :* $CM = \sqrt{5,7^2+}$ E2 Non, c'est pas au carré. E3 Mais si, c'est au carré E2 Mais ça revient à dire $AB + BC$ E3 Tu vois c'est ce que je disais E2 Ben on a fait n'importe quoi ! Donc on fait : $AC = \sqrt{AB} + \sqrt{BC}$ E1 Non, c'est au carré E2 Donc $AC = AB + BC$? !		JL repasse et écrit sur la feuille : $\sqrt{9+16} =? \sqrt{9} + \sqrt{16}$	10h53
E1 écrit : $AC^2 = AB^2 + BC^2$; *E2 mesure sur le triangle dessiné...*			10h56 : Sonnerie

5 Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)

De nombreuses procédures sont possibles et peuvent faire référence à différentes méthodes mathématiques.
Des difficultés émergent en fonction du niveau de connaissance des élèves, par exemple pour l'obtention du minimum pour des élèves ayant introduit une fonction.
Pour certaines procédures géométriques, la difficulté principale est le passage de l'autre côté de la rivière, autrement dit la capacité à envisager le symétrique de A ou B par rapport à D pour se ramener à une situation connue de plus court chemin entre A et B, sans contrainte.
De manière générale, les raisonnements purement géométrique (en s'affranchissant des méthodes analytiques liées à la mesure) sont plus difficilement accessibles et spontanées chez les élèves.
Autres difficultés :

- Pour les plus jeunes élèves, des difficultés sont liées à l'appropriation du problème et en particulier á la compréhension du schéma. Certains associent le "ruisseau" á l'endroit où le mot "ruisseau" est écrit et non pas à la droite qui le représente.
- Pour d'autres émergent des difficultés liées aux imprécisions dues à la mesure, d'où la difficulté à valider les plus courts chemins et à les comparer.