Les nombres trapézoïdaux
Analyse didactique

Équipe DREAM

15 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

La situation mathématique :
Quels sont les nombres entiers positifs $n > 0$ tels que

$$\exists p \in \mathbb{N}\ \exists q \in \mathbb{N} \land q > p \text{ tels que } n = \sum_{i=p}^{q} i$$

L'énoncé mathématique est compliqué mais l'énoncé en français est également difficile à exprimer simplement :

- Trouver tous les entiers naturels strictement positifs qui sont la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.
- Trouver tous les entiers naturels strictement positifs qui sont la somme d'entiers naturels consécutifs.
- Trouver les nombres entiers plus grand que 0 qui sont la somme d'autres nombres entiers qui se suivent.
- Quels sont les nombres qui sont sommes de 2 entiers consécutifs ? et de 3, 4,…, n ? Est-ce que tous les nombres peuvent être somme de nombres consécutifs ?

Ces énoncés sont une traduction en français de l'énoncé mathématique mais peuvent induire des stratégies de résolution différentes et en ce sens peuvent être considéré comme des variables didactiques de la situation et peuvent être utilisés à des niveaux différents.

2 Variables de la situation

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, l'énoncé lui-même est une variable de cette situation qui peut induire des stratégies différentes de résolution : deux entrées distinctes :

- soit on cherche les nombres « atteignables » (entrée par les nombres),
- soit on cherche les nombres atteints par les sommes de 2, 3,…, k,…termes (entrée par les sommes).

Dans le premier cas, les compétences visées relèvent plus de la recherche d'exemples et de contre-exemples, de la généralisation de propriétés constatées sur des exemples, etc. Dans le second cas, les objectifs d'apprentissage porteront plus sur les écritures algébriques, la recherche de « pattern » et la généralisation.
Suivant le niveau des élèves, il est possible de commencer par poser des questions sur des nombres ; par exemple 2, 3, 4, 5, 6 sont-ils atteignables ? Dans cette liste, il est intéressant de voir que deux des nombres 2 et 4 ne sont pas atteignables, que 5 est somme de deux nombres consécutifs (2+3) et que 6 est somme de trois nombres consécutifs (1+2+3). La « règle du jeu » est ainsi clarifiée : les sommes peuvent avoir 2 ou plus termes de nombres consécutifs.
Il est également possible de proposer l'utilisation d'un tableur ; cette proposition induit une entrée dans le problème par les sommes.

3 Connaissances et capacités mises en jeu

Outre bien sûr les nombreux calculs faits dans les expériences successives, les connaissances mathématiques en jeu sont nombreuses :

- écriture algébrique des nombres, par exemple représentation des nombres impairs comme nombre qui peut s'écrire sous la forme $2k + 1$ (le passage des nombres impairs comme nombres se terminant par 1, 3, 5, 7, 9 a cette écriture algébrique est un connaissance

importante peu souvent abordée), mais aussi caractérisation algébrique des multiples d'un nombre, des nombres congrus à k modulo n, etc.
- multiples, diviseurs, reste dans la division euclidienne,
- somme des entiers consécutifs, nombres triangulaires : $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Par ailleurs, la recherche, tout comme les essais conduisent à manipuler les notions d' exemple et de contre-exemple, à dégager des sous-problémes et des exemples génériques.
La notion d'algorithmes est également une connaissance envisageable dans ce problème : un nombre non puissance de 2 étant donné, comment trouver une somme d'entiers consécutifs égale à ce nombre ?

4 Procédures élèves

Au collège, les élèves émettent facilement des conjectures du type :
- les nombres impairs sont atteignables. Les élèves peuvent aller jusqu'à la démonstration : si on fait la somme de deux entiers consécutifs alors on obtient un impair et réciproquement, si un entier est impair, alors il s'écrit comme somme de deux entiers consécutifs. Ce travail peut être un sous problème que les élèves peuvent explorer longuement.
- si on considère des sommes de trois termes alors les nombres obtenus sont de la forme $3k + 3$; il est souvent difficile de relier cette écriture à celle des multiples de 3.
- lorsque les élèves entrent par les sommes, les résultats :
  — 2 termes : les nombres sont de la forme $2k + 1$
  — 3 termes : les nombres sont de la forme $3k + 3$
  — 4 termes : les nombres sont de la forme $4k + 6$
  — 5 termes : les nombres sont de la forme $5k + 10$
  — ...
- la régularité peut apparaître et parfois la définition par récurrence : 1+2=3, 3+3=6, 6+4=10, ... si une somme a n termes alors les nombres sont de la forme : « $n \times k + reste$ et ce reste est le reste précédent plus $n - 1$ ». L'écriture d'une forme : $u_n = nk + 1 + 2 + \cdots + n - 1$ en revanche ne sort pas naturellement.
- les premiers essais peuvent faire apparaître la conjecture fausse : les entiers pairs ne peuvent être atteints.

Au lycée, les élèves arrivent assez rapidement à la conjecture que seuls les puissances de 2 ne pourront être atteintes. En revanche la démonstration est plus difficile à sortir. Bien entendu, les résultats que les élèves de collège trouvent font aussi partie des résultats. Les élèves de lycée utilisent plus facilement les lettres pour traiter ce problème.
En partant de la question : « Est-ce que l'on peut trouver une somme pour un nombre donné ? », les élèves expérimentent sur des exemples : $12 = 4+4+4$ donc $12 = (4-1)+4+(4+1) = 3+4+5$, ou bien $40 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$.
La généralisation n'est pas immédiate mais peut aussi constituer un sous problème :
Si N est un nombre pair non puissance de 2, il a obligatoirement un diviseur impair et peut s'écrire : $N = (2k + 1)n$ alors

$$N = (n - k) + (n - k + 1) + \cdots + (n - 1) + n + (n + 1) + \cdots + (n + k - 1) + (n + k)$$

Sur certains exemples, on obtient alors des nombres négatifs :

$$14 = 7\times 2 = (2\times 3+1)\times 2 = (2-3)+(2-2)+(2-1)+2+(2+1)+(2+2)+(2+3) = -1+0+1+2+3+4+5$$

Ce qui peut conduire à une généralisation du problème aux nombres entiers (voir les prolongements), et qui, de toutes façons donnent une somme puisque $-1+0+1=0$ et donc $14=2+3+4+5$!
Tout comme au collège, la démonstration n'est pas facilement trouvée par les élèves, même si nous avons pu observer quelque fois des raisonnements corrects ou proches de la démonstration formelle. En revanche dans la mise en commun, un gros travail peut être fait concernant la réfutation de conjectures erronées ou de résultat équivalents (par exemples, les nombres de la forme $3k+3$ et les multiples de 3, ou bien les multiples de 2 au lieu des puissances de 2).

5 Difficultés et erreurs possibles

Un certain nombre de difficultés viennent de l'énoncé du problème lui-même : difficultés liées à la règle, au vocabulaire utilisé, aux consignes, etc.

- Compréhension de la règle : le milieu ne peut pas valider et les indications données par le professeur, ce qui peut induire un type de raisonnement. Les consignes et les explicitations orales sont donc très importantes, en tenant compte, en particulier, des variables didactiques décrites dans le paragraphe « Variables didactiques ».
- Vocabulaire : le mot « consécutif » est à préciser à l'oral. Le mot « somme » peut ne pas être familier lorsque le nombre de terme dépasse 2.
- Consigne : comme il est déjà dit dans les paragraphes précédents, la consigne, écrite ou orale, peut induire des stratégies différentes conduisant à modifier sensiblement la situation didactique.

Par ailleurs, une difficulté, notamment en collège, est d'aller jusqu'à prouver le résultat. Il s'agit donc de penser à l'avance la conclusion et l'institutionnalisation pour conclure cette situation.