Les fractions égyptiennes
Analyse didactique

Équipe DREAM

15 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

- Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?
- Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a, b et c tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?
- Peux-tu trouver quatre entiers naturels distincts a, b, c et d tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

Continue…

2 Variables de la situation

Deux variables semblent particulièrement importantes à prendre en compte dans cette situation :

- **L'énoncé**. Voici trois possibilités : donner l'énoncé avec les 3 questions, donner l'énoncé uniquement avec la dernière question et donner les trois questions séparément et successivement.

  Donner les trois questions séparément et successivement peut avoir l'avantage de faire travailler sur les élèves pendant un certain temps sur chaque question. Mais il faut prendre en compte la nature des résultats et la conséquence sur les procédures à mettre en place. En effet, la première question n'a pas de réponse alors que la seconde a une réponse unique et la troisième plusieurs solutions. Le passage de la première question à la seconde peut être délicat, notamment pour relancer la recherche après avoir dit qu'il n'y a pas de solution pour $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

  Pour un public plus aguerri, on pourra éventuellement supprimer les deux premières questions, en gardant bien à l'esprit que les objets mathématiques travaillés seront différents.

- **La calculatrice** : autorisée ou non. L'utilisation ou non de la calculatrice diversifi
  e les procédures des élèves. Autoriser la calculatrice permet de favoriser l'engagement dans le problème par la recherche à « à tâtons » de solutions. Il faut cependant s'attendre à avoir des solutions exprimées en valeurs approchées. Cela nécessitera alors un retour sur ces solutions pendant le temps de bilan. Il est donc important de prévoir cet aspect matériel en fonction des objets mathématiques que l'on souhaite le plus voir émerger.

3 Connaissances et capacités en jeu

L'objectif ici est de proposer une liste d'objets, de propriétés, de raisonnements mathématiques que l'on sait susceptibles d'être mis en œuvre lors d'une telle activité. Tous les éléments de cette liste ont été observés lors d'expérimentations dans de « vraies » classes, dans des conditions de fonctionnement habituel.

Cette présentation doit permettre d'aider le professeur à prévoir et repérer les apparitions de points intéressants dans le contexte de la recherche en classe et d'aider à préparer les mises en commun et synthèses avec les élèves.

La présentation suivante utilise des extraits de productions d'élèves ou des questionnements qui sont apparus lors des recherches.

Plutôt en collège...

- Inverse de 0 ?
  « $1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$ car 0 c'est rien »
  « $1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$ car $\frac{1}{0}$ ça n'existe pas »
- Écriture décimale d'un rationnel, nombre décimal
  Que faire d'écritures décimales obtenues à la main ?
  Quelles opérations sur les écritures décimales ?
  Qu'est-ce qu'une écriture décimale ?
  Comparaison de travaux sur les décimaux et sur les écritures décimales ?
  Quelle différence dans les manipulations ?
  Qu'est-ce qu'une approximation d'un réel ?
  « Sachant que : $0,3 + 0,2 + 0,5 = 1$, est-ce que : $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1$?
  A-t-on : $\frac{1}{3} = 0,3$? » Qu'est-ce qu'on obtient avec la calculatrice ?
  Quelle approximation avec la calculatrice ?
- Somme de rationnels
  « A-t-on : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$? (à la calculatrice $0,9999$...).Comment le prouver ? »
  Puis un travail de preuve : comment prouver avec les fractions ?
- Vers une perception de l'égalité comme équivalence
  « Ici, je multiplie les dénominateurs par 2, j'obtiens : $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 0,5$ d'oŭne solution au rang supérieur »
- Cadre géométrique : une perception de découpages possibles du segment $[0;1]$
  « $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ or $\frac{1}{2}$ est la plus grande fraction de $[0;1]$ différente de 1, donc je ne peux remplacer le deuxième $\frac{1}{2}$ par une autre fraction qui convienne »
  La réalisation de croquis peut permettre de visualiser : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.
- Conception sur les opérations
  A propos de $a + b = ab$: « le produit, c'est plus grand que la somme ! »
- Décroissance de : $x \mapsto \frac{1}{x}$
  « Ce n'est pas possible d'obtenir 1 avec deux naturels distincts, car en ajoutant les deux plus grands résultats, on n'obtiendra que : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0,833$ ».
- Possibilité de travailler les compétences en logique avant le symbolisme
  Difficulté pour débattre après l'obtention d'écriture de la forme : $0 = 0$.

Plutôt en lycée...

- Inverse de O ?
- Somme et différence de rationnels
  « A-t-on : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$?(la calculatrice affichant 0,9999...). Comment le prouver ? »
  Transformation de : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
  Calculs : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;... ; $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$!
- Décroissance de : $x \mapsto \frac{1}{x}$
  soit en acte comme au collège
  soit lors de l'étude de : $a = 1 + \frac{1}{b-1}$.
- Cadre plus géométrique : une perception de découpages possibles du segment $[0;1]$
- Vers une perception de l'égalité comme équivalence

« $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est équivalent à $ab = a + b$ ou à $ab = 1 + 1$? »
« Ici, je multiplie les dénominateurs par 2, j'obtiens : $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 0,5$ d'où une solution au rang supérieur »

- Essais successifs, adéquation des valeurs de deux fonctions.

  Cet aspect est mis particulièrement en évidence lors de tests sur des expressions de la forme : $\frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{b}$ ou $a + b = ab$

  Pour quatre inverses un élève prend $d = 2$ et teste :$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{c}$

  $ab + ac + bc = abc$
- Travail sur tableur pour trouver une décomposition en une somme de trois fractions
- Travail en logique

  Raisonnement par l'absurde : $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ donc...

  Impasse : $a = f(b)$; $b = f^{-1}(a)$; $a = f(f^{-1}(a)) = a$

  Exemples et contre exemple pour les problèmes existentiels « Que dire aux élèves qui recherche un contre-exemple pour montrer que : $a + b \neq ab$? »
- Conception concernant la recherche

  Un « algorithme » existe pour les cas 2 et 3 donc il doit exister pour le cas 1.

  « Inutile de passer au cas 2 si on n'a pas trouvé pour le cas 1 »

  Compétence travaillée : les phénomènes mathématiques ne sont pas uniformes.

Remarque 1 :

En lycée, un démarrage sans calculatrice et une utilisation rapide de l'algèbre amènent parfois à des blocages en ce qui concerne le problème. Les productions montrent bien évidemment un travail certain des élèves sur ces notions non encore naturalisées. Une mise en commun pour prolonger ces travaux permet de travailler les transformations d'égalité, l'utilité de mettre en œuvre des essais et de tester l'adéquation des valeurs de deux fonctions ici de deux ou trois variables... Cette piste n'est donc pas à laisser de côté.

Remarque 2 :

Ont été présentées ci-dessus les pistes les plus fréquentes. De très nombreuses autres sont certainement envisageables suivant le contexte (travail sur les propriétés de divisibilité en arithmétique, utilisation de l'équation du second degré pour déterminer a et b de somme égal au produit avec une généralisation éventuelle...). En cherchant vous en trouverez sans doute bien d'autres.

4 Procédure(s) élèves

Les procédures des élèves peuvent être les suivantes :

- Des procédures exploratoires : les élèves prennent des valeurs numériques de a, b (c et d), calculent la somme de fractions et vérifient s'ils obtiennent 1. Ils avancent par essais et erreurs. La calculatrice, lorsqu'elle est autorisée, est souvent utilisée.

- Des procédures algébriques (à partir de la fin du collège) : les élèves mettent la somme de fractions sous le même dénominateur, donnent ensuite une équation équivalente et cherchent à la résoudre. Ces procédures ne donnent en général pas ou peu de résultats.

- Des procédures graphiques : certains élèves cherchent des solutions en dessinant des disque ou des rectangles qu'ils essaient de découper en demi, tiers, quart, etc. Cela leur permet de comprendre qu'il n'y a pas de solution à la première question et de trouver la solution pour la somme de trois fractions égyptiennes. Pour la suite, cela est plus difficile avec cette procédure. Certains élèves cherchent également à utiliser la représentation de l'hyperbole mais sans grand succès.

- Des procédures articulant des essais et des écritures algébriques : des élèves cherchent des solutions numériques puis ensuite essaient de généraliser. Par exemple, pour la troisième question, ils parviennent à trouver comment passer d'une décomposition à 3 fractions à une décomposition à 4 fractions et à l'exprimer algébriquement.

5 Difficulté(s) et erreur(s) possible(s)

La première difficulté qui peut être rencontrée est la recherche et la preuve de la question 1. En effet, les élèves ont des difficultés, d'une part à accepter qu'il n'y a pas de solution, et d'autre part, à prouver qu'il n'y en a pas. Cette difficulté doit être anticipée et l'enseignant peut choisir d'aider les élèves de différentes façons : donner des aides au sein des groupes, demander de passer à la seconde question, faire un bilan collectif, etc.

La seconde difficulté peut être engendrée par la nature des différents résultats : les élèves peuvent avoir du mal à comprendre qu'il y a des résultats différents selon les questions et donc avoir des difficultés à changer leur représentation du problème et leurs procédures de recherche.

La troisième difficulté qui peut survenir est la distinction entre valeur exacte et valeur approchée. Cela sera l'occasion de travailler sur ces aspects lors du bilan du problème.