Étude d'un système du second ordre

Résolution d'équations différentielles d'ordre deux

Soit un système régit par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants : $a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+c\,y(t)=f(t)$ ou $ay''(t)+by'(t)+c\,y(t)=f(t)$ et les conditions initiales ou aux limites $y'(0)=B$ et $y'(0)=A$. En prenant la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité avec $TL[y(t)]=Y(p)$ et en remplaçant $y'(0)\ et\ y(0)$ on trouve une équation algébrique qui détermine Y(p).

$$a\,TL\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]+b\,TL\left[\frac{d\,y(t)}{dt}\right]+cTL[y(t)]=TL[f(t)]$$

$$a\left(p^2Y(p)-p\,y(0)-y'(0)\right)+b\left(pY(p)-y(0)\right)+c\,Y(p)=F(p)$$

$$Y(p)\left(a\,p^2+b\,p+c\right)-\left(a\,p\,y(0)+a\,y'(0)+b\,y(0)\right)=F(p)$$

$$Y(p)=\frac{F(p)}{a\,p^2+b\,p+c}+\frac{a\,p\,y(0)+a\,y'(0)+b\,y(0)}{a\,p^2+b\,p+c}=Y_p(p)+Y_t(p)$$

La transformée de Laplace Y(p) de la solution est la somme de deux termes :

- Y_p(p) dû à l'entrée F(p) : c'est la solution particulière de l'équation avec second membre ;
- Y_t(p) dû aux conditions initiales y(0) et y '(0) : c'est la solution propre de l'équation sans second membre.

Il suffit alors de prendre la transformée de Laplace inverse de cette solution.

Exercice : Résoudre une des équations différentielles suivantes où y(t) est une fonction causale de transformée de Laplace Y(p). La première est plus facile !!

- y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0 avec $y(0^+)=0$ et $y'(0^+)=1$

Corrigé

$$y''(t)+3\,y'(t)+2\,y(t)=0$$

$$TL[y''(t)]+3\,TL[y'(t)]+2\,TL[y(t)]=0$$

$$\left(p^2Y(p)-p\,y(0)-y'(0)\right)+3\left(pY(p)-y(0)\right)+2\,Y(p)=0$$

$$Y(p)\left(p^2+3\,p+2\right)-\left(p\,y(0)+y'(0)+3\,y(0)\right)=0$$

$$Y(p)=Y_t(p)=\frac{p\,y(0)+y'(0)+3\,y(0)}{p^2+3\,p+2}=\frac{1}{p^2+3\,p+2}=\frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$Y(p)=\frac{A}{(p+1)}+\frac{B}{(p+2)}\quad;\quad A=\left.\frac{1}{(p+2)}\right|_{p=-1}=1\quad;\quad B=\left.\frac{1}{(p+1)}\right|_{p=-2}=-1$$

$$Y(p)=\frac{1}{(p+1)}-\frac{1}{(p+2)}\quad => \quad y(t)=e^{-t}-e^{-2t}\quad \text{pour } t\geq 0$$

- y''(t)-2y'(t)+y(t)=0 avec $y(0^+)=1$ et $y'(0^+)=0$

Corrigé

$$y''(t)-2\,y'(t)+y(t)=0$$

$$TL[y''(t)]-2\,TL[y'(t)]+TL[y(t)]=0$$

$$\left(p^2Y(p)-p\,y(0)-y'(0)\right)-2\left(p\,Y(p)-y(0)\right)+Y(p)=0$$

$$Y(p)\left(p^2-2\,p+1\right)-\left(p\,y(0)+y'(0)+2\,y(0)\right)=0$$

$$Y(p)=Y_t(p)=\frac{p\,y(0)+y'(0)-2\,y(0)}{p^2-2\,p+1}=\frac{p-2}{p^2-2\,p+1}=\frac{p-2}{(p-1)^2}$$

$$Y(p)=\frac{A_2}{(p-1)^2}+\frac{A_1}{(p-1)}\quad;\quad A_2=(p-2)\big|_{p=1}=-1\quad;\quad p\,Y(p)\big|_{p=\infty}=\left.\frac{p^2}{p^2}\right|_{p=\infty}=1=A_1$$

$Y(p)=\frac{-1}{(p-1)^2}+\frac{1}{(p-1)}$ => $y(t)=-t\,e^t+e^t$ pour t≥0

car en utilisant les deux propriétés

$TL[t\cdot\upsilon(t)]$	$\frac{1}{p^2}$
$TL\left[e^{-at}\cdot f(t)\upsilon(t)\right]$	$F(p+a)$

on a : $TL\left[e^{-at}\cdot t\,\upsilon(t)\right]=\frac{1}{(p+a)^2}$ => $TL\left[t\,e^t\cdot\upsilon(t)\right]=\frac{1}{(p-1)^2}$

- y''(t)+4y'(t)+8y(t)=(t+1)u(t) avec $y(0^+)=y'(0^+)=0$

<u>Corrigé exo trop compliqué !!</u>

$$y''(t)+4\,y'(t)+8\,y(t)=(t+1)u(t)$$

$$TL[y''(t)]+4\,TL[y'(t)]+8\,TL[y(t)]=TL[(t+1)u(t)]$$

$$\left(p^2Y(p)-p\,y(0)-y'(0)\right)+4\left(p\,Y(p)-y(0)\right)+8\,Y(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}$$

$$Y(p)\left(p^2+4\,p+8\right)-\left(p\,y(0)+y'(0)+4\,y(0)\right)=\frac{p+1}{p^2}$$

$$Y(p)=Y_t(p)+Y_p(p)=\frac{p\,y(0)+y'(0)+4\,y(0)}{p^2+4\,p+8}+\frac{p+1}{p^2(p^2+4\,p+8)}=\frac{p+1}{p^2(p^2+4\,p+8)}$$

Le second membre est une fraction rationnelle => il faut la décomposer en éléments simples.

p²+4p+8 n'a pas de racine réelle (Δ=-16), voici donc la forme des éléments simples :

$$Y(p)=\frac{A_2}{p^2}+\frac{A_1}{p}+\frac{C\,p+D}{(p^2+4\;p+8)}$$

$$A_2=\left.\frac{p+1}{(p^2+4\,p+8)}\right|_{p=0}=\frac{1}{8}\quad;\quad \left.p\,Y(p)\right|_{p=\infty}=\left.\frac{p^2}{p^4}\right|_{p=\infty}=0=A_1+C$$

$$Y(1)=\frac{1+1}{1^2(1^2+4+8)}=\frac{2}{13}=A_2+A_1+\frac{C+D}{(1^2+4\;+8)}=\frac{1}{8}+A_1+\frac{C+D}{13}\quad=>\quad 13\,A_1+C+D=\frac{3}{8}$$

$$Y(-1)=\frac{-1+1}{1(1-4+8)}=0=A_2-A_1+\frac{-C+D}{(1-4\;+8)}=\frac{1}{8}-A_1+\frac{-C+D}{5}\quad=>\quad -5\,A_1-C+D=\frac{-5}{8}$$

$$18\,A_1+2\,C=\frac{-8}{8}\quad=>\quad 18\,A_1-2\,A_1=1\quad=>\quad A_1=\frac{1}{16}\quad=>\quad C=\frac{-1}{16}$$

$$5C-C+D=\frac{-5}{8}\quad=>\quad D=\frac{-5}{8}-4\,C=\frac{-5}{8}+\frac{4}{16}=\frac{-3}{8}$$

$$Y(p)=\frac{\frac{1}{8}}{p^2}+\frac{\frac{1}{16}}{p}-\frac{\frac{1}{16}p+\frac{3}{8}}{(p^2+4\;p+8)}\quad=>\quad \frac{\frac{1}{16}p+\frac{3}{8}}{(p^2+4\;p+8)}=\frac{1}{16}\frac{p+6}{(p^2+4\;p+4+4)}=\frac{1}{16}\frac{p+6}{((p+2)^2+4)}$$

$$\frac{\frac{1}{16}p+\frac{3}{8}}{(p^2+4\;p+8)}=\frac{1}{16}\frac{p+2+4}{((p+2)^2+2^2)}=\frac{1}{16}\left(\frac{p+2}{((p+2)^2+2^2)}+2\frac{2}{((p+2)^2+2^2)}\right)$$ (voir les deux dernières formules du formulaire pour comprendre cette décomposition)

$$y(t)=\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}e^{-2t}\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)\quad \text{pour } t\geq 0$$

Les calculs de la décomposition en éléments simples sont beaucoup trop compliqués !!!!!

On ne vous demandera JAMAIS cela !!!

Exercices pour le TD suivant

- Résoudre y''(t)+y'(t)-2y(t)=exp(3t), on prendra $y'(0^+)=1$, $y(0^+)=0$.
- Résoudre y'''(t)-3y'(t)-2y(t)=cos(3t),on prendra $y''(0^+)=1$, $y'(0^+)=0$, $y(0^+)=0$.

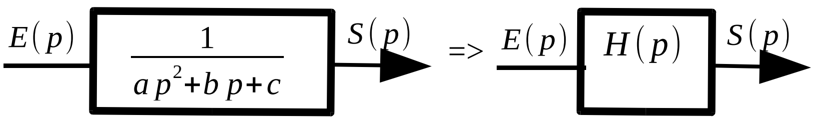
remarque : $p^3-3p-2=(p-2)(p+1)^2$

Fonction de transfert d'un système linaire d'ordre 2

Soit un système régit par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a\frac{d^2 s(t)}{dt^2}+b\frac{ds(t)}{dt}+c\,s(t)=e(t)$$

Avec le même calcul que dans le paragraphe précédent, et en considérant les **conditions initiales nulles**, on obtient la **fonction de transfert** du système $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{a p^2+b p+c}$ ce qui peut être représenté graphiquement de la manière suivante :



<u>Remarque</u> : ceci peut s'appliquer aux équations ordinaires de degré plus élevé.

Forme normalisée d'une fonction de transfert du second ordre :

La **forme normalisée** d'un système du second ordre est $H(p)=\frac{k}{1+2z\frac{p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}}$.

Sous cette forme, et **sous cette forme seulement**, le numérateur k correspond au gain statique.

ω_n est la pulsation naturelle (ou pulsation propre non amortie) (en rad/s) (natural frequency).

z est le coefficient d'amortissement (sans dimension) (damping ratio)

On verra par la suite que :

ω_n règle la rapidité, la bande passante du système

z règle la forme de la réponse indicielle (plus ou moins d'oscillations)

<u>Remarque</u>: les électroniciens (filtrage) préfère la forme suivante : $H(p)=\frac{k}{1+\frac{p}{Q\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}}$

où $Q=\frac{1}{2z}$ est le facteur de qualité du filtre (sans dimension) (Q factor).

Il est relié à la bande passante du filtre.

<u>Exemple</u> : $H(p)=\frac{1}{a p^2+b p+c}=\frac{1}{c+bp+a p^2}=\frac{1}{c(1+\frac{b}{c}p+\frac{a}{c}p^2)}=\frac{\frac{1}{c}}{1+\frac{b}{c}p+\frac{a}{c}p^2}$.

En identifiant on a :

$k=\frac{1}{c}$ le gain statique.

$\frac{a}{c}=\frac{1}{\omega_n^2}$ => $\omega_n=\sqrt{\frac{c}{a}}$ est la pulsation naturelle

$\frac{b}{c}=\frac{2z}{\omega_n}$ => $z=\frac{b\omega_n}{2c}=\frac{b}{2c}\sqrt{\frac{c}{a}}=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{1}{ac}}$ est le coefficient d'amortissement z

Exercice 3 (*)

<u>Étude d'un système du deuxième ordre du génie électrique - Circuit RLC *</u>

Soit un circuit RLC série avec e(t) l’entrée et s(t) la tension de sortie aux bornes du condensateur.

1) Écrire les équations électriques entre la tension aux bornes des composants R, L et C et le courant i(t).

$$e(t)=u_R(t)+u_L(t)+u_c(t) \quad ;$$

avec $u_R(t)=R\,i(t)$ et $u_L(t)=L\frac{d}{dt}i(t)$; $i(t)=C\frac{d}{dt}u_C(t)$; $s(t)=u_C(t)$

2) Écrire la loi des mailles. En déduire l’équation différentielle en liant e(t) à s(t).

$$e(t)=R\,i(t)+L\frac{d}{dt}i(t)+s(t)=RC\frac{d}{dt}s(t)+LC\frac{d^2}{dt^2}s(t)+s(t)=RC\,s'(t)+LC\,s''(t)+s(t)$$

3) Prendre la transformation de Laplace de l'équation différentielle. On prendra les conditions initiales nulles.

$$TL[LC\,s''(t)+RC\,s'(t)+s(t)]=TL[e(t)]\Rightarrow LC\,TL[s''(t)]+RC\,TL[s'(t)]+TL[s(t)]=TL[e(t)]$$

$$LC\left(p^2S(p)-p\,s(0)-s'(0)\right)+RC\left(p\,S(p)-s(0)\right)+S(p)=E(p)$$

$$S(p)\left(LC\,p^2+RC\,p+1\right)-\left(LC\left(p\,s(0)+s'(0)\right)+RC\,s(0)\right)=E(p)$$

$$S(p)\left(LC\,p^2+RC\,p+1\right)=E(p)+\left(LC\left(p\,s(0)+s'(0)\right)+RC\,s(0)\right)$$

$S(p)\left(LC\,p^2+RC\,p+1\right)=E(p)$ avec les conditions initiales nulles.

4) Écrire la Fonction de Transfert du circuit RLC. Pour l’application numérique, prendre : 1/(LC)= 6 et R/L=5 et donc RC=5/6.

$$S(p)=\frac{E(p)}{\left(LC\,p^2+RC\,p+1\right)} \quad => \quad \frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{\left(1+RC\,p+LC\,p^2\right)}=H(p)$$

$$H(p)=\frac{\frac{1}{LC}}{\left(p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}\right)} \quad => \quad H(p)=\frac{6}{\left(p^2+5p+6\right)}$$

Sous forme normalisée : $H(p)=\dfrac{1}{1+\frac{5}{6}p+\frac{1}{6}p^2}$

5) On considère que e(t) est un échelon de tension de 5 Volt. Que vaut E(p) ?

$$E(p)=\frac{5}{p}$$

6) Remplacer E(p) et en déduire l’expression de S(p).

$$S(p)=E(p)H(p)=5x\frac{6}{p(p^2+5p+6)}=\frac{30}{(p+3)(p+2)p}$$

7) Résoudre en effectuant une décomposition en élément simples.

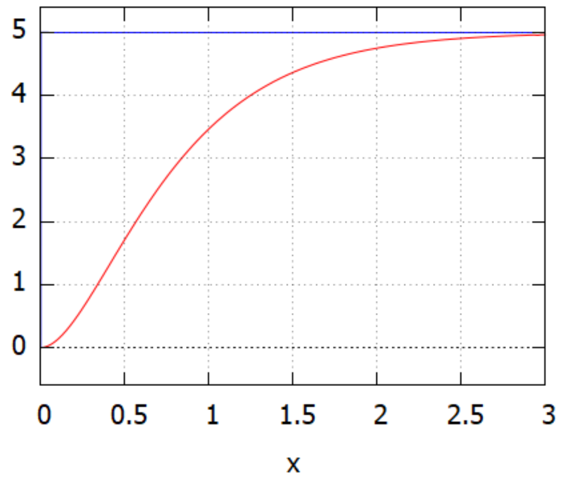
$$S(p)=\frac{A}{(p+3)}+\frac{B}{(p+2)}+\frac{C}{p} \quad \text{avec} \quad A=\left.\frac{30}{p(p+2)}\right|_{p=-3}=10 \quad ; \quad B=\left.\frac{30}{p(p+3)}\right|_{p=-2}=-15$$

$$C=\left.\frac{30}{(p+3)(p+2)}\right|_{p=0}=5$$

$$S(p)=\frac{10}{(p+3)}-\frac{15}{(p+2)}+5$$

8) Trouver l'original temporel s(t) et tracer sur un même graphique e(t) et la réponse de s(t).

$y(t)=10e^{-3t}-15e^{-2t}+5$ pour $t\geq 0$



9) Identifier sous forme littérale les paramètres de la fonction de transfert : k le gain statique, ω_n la pulsation naturelle et z le coefficient d'amortissement. Pour quelle valeur de R la valeur de z est inférieure à 1 ?

On identifie avec $H(p)=\dfrac{k}{1+2z\dfrac{p}{\omega_n}+\dfrac{p^2}{\omega_n^2}}$ avec $H(p)=\dfrac{1}{(1+RC\,p+LC\,p^2)}$

$k=1$ le gain statique.

$LC=\dfrac{1}{\omega_n^2}$ => $\omega_n=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ est la pulsation naturelle.

$RC=\dfrac{2z}{\omega_n}$ => $z=\dfrac{\omega_n RC}{2}=\dfrac{RC}{2}\sqrt{\dfrac{1}{LC}}=\sqrt{\dfrac{R^2C^2}{4LC}}=\sqrt{R^2\dfrac{C}{4L}}$ est le coefficient d'amortissement z

on a $z<1$ si $R^2\dfrac{C}{4L}<1$ => $R^2<\dfrac{4L}{C}$ => $R<\sqrt{\dfrac{4L}{C}}$

10) Retrouver la fonction de transfert S(p)/E(p) en utilisant directement les impédances complexes du circuit RLC.

$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\frac{1}{Cp}}{\left(R+Lp+\frac{1}{Cp}\right)}=\frac{Cp\,\frac{1}{Cp}}{Cp\left(R+Lp+\frac{1}{Cp}\right)}=\frac{1}{\left(1+RC\,p+LC\,p^2\right)}=H(p)$$

Pour aller plus loin : (en semestre 3!!)

1. Identification des paramètres de la formes normalisée

Soit les systèmes d'ordre 2 suivant : $H_3(p)=\frac{K}{(1+Tp)^2}$ et $H_4(p)=\frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$. Mettre ces systèmes sous forme normalisée, en déduire le gain statique, la pulsation naturelle ω_n et le coefficient d'amortissement z de ces systèmes.

2. Calcul des pôles de la forme normalisée d'une fonction de transfert

On cherche les pôles de : $H(p)=\frac{k}{1+2z\frac{p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}}$

donc les valeurs de p telles que : $1+2z\frac{p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}=0$ soit $p^2+2z\omega_n p+\omega_n^2=0$

Le discriminant s'écrit : $\Delta=(2z\omega_n)^2-4\omega_n^2$ => $\Delta=4\omega_n^2(z^2-1)$

Conséquence :

- si z> 1 => $\Delta>0$ et les poles sont réels : $p=\frac{-2z\omega_n\pm\sqrt{\Delta}}{2}=-z\omega_n\pm\omega_n\sqrt{z^2-1}$
- si z= 1 => $\Delta=0$ et un pole réel double : $p=-z\omega_n$
- si z< 1 => $\Delta<0$ et les pôles sont complexes : $p=\frac{-2z\omega_n\pm j\sqrt{-\Delta}}{2}=-z\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-z^2}$

3. On considère une entrée en échelon (tension constante E avec une valeur initiale nulle) : $E(p)=\frac{1}{p}$

et les 5 systèmes suivants de fonctions de transfert : $H_1(p)=\frac{1}{p}$; $H_2(p)=\frac{1}{1+Tp}$

Étudiez la réponse indicielle (sortie correspondant une entrée en échelon) sur les 2 systèmes en trouvant l'expression S(p) de la transformée de Laplace de la sortie, puis s(t) en fonction du temps.

Remarque : H_1 correspond à un intégrateur, H_2 à un filtre RC