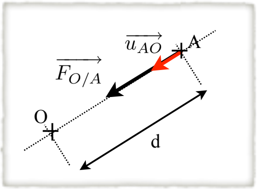
1. Rappels : la force de gravitation et le poids

- La force d'attraction gravitationnelle entre deux objets s'écrit : $\boxed{\overrightarrow{F_{O/A}} = G\,\frac{m_A\, m_O}{d^2}\,\overrightarrow{u_{AO}}}$



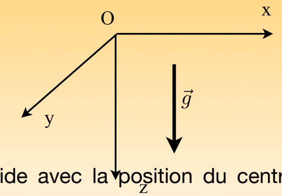
avec | G la constante de gravitation
m_A la masse de l'objet A
m_O la masse de l'objet O
d la distance entre O et A
$\overrightarrow{u_{AO}}$ le vecteur unitaire (de norme 1) orienté de A vers O.

- Lorsqu'un objet se situe au voisinage de la Terre, la force gravitationnelle que le Terre exerce sur l'objet s'appelle *le poids de l'objet*, que l'on écrit sous la forme plus simple : $\boxed{\vec{P} = m\,\vec{g}}$ avec $\vec{g} = G\,\frac{m_T}{{R_T}^2}\,\overrightarrow{u_{OT}}$ ($\overrightarrow{u_{OT}}$ vecteur unitaire de l'objet vers le centre de a Terre).

2. Situation 1 : chute libre verticale

2.1. Mise en équation du problème

On étudie une bille qui tombe verticalement dans un fluide dont on néglige les effets. La bille est lâchée à la date t = 0 s sans vitesse initiale : $\vec{v_0} = \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$.



On utilise un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que l'origine O coïncide avec la position du centre d'inertie de la bille à t = 0 s. L'axe $(O, \vec{k})$ est dirigé vers le bas.

Quelles sont les équations horaires du mouvement ?

- Système étudié : la bille
- Référentiel : un référentiel terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces qui s'appliquent sur la bille :
  - force de l'air sur la bille
  - force de la Terre sur la bille (poids de la bille)
  - on néglige l'action de l'air devant le poids de la bille.

Lorsque la bille n'est soumise qu'à son poids, on parle de chute libre.

- On applique la 2ème loi de Newon : $\vec{P} = m\,\vec{a}(t)$

Donc $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}(t)$

On tire donc $\boxed{\vec{a}(t) = \vec{g}}$

L'accélération du centre d'inertie de la bille est indépendant de la masse de la bille.

2.2. Équations horaires du mouvement

2.2.1. Détermination du vecteur vitesse

On projette la relation vectorielle sur les axe :

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z(t)}{dt} = g \end{cases} \rightarrow \vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = A \\ v_y(t) = B \\ v_z(t) = g\,t + C \end{cases} \rightarrow \vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = g\,t \end{cases}$$

Recherche des primitives

conditions initiales :

À t = 0 s, on a | $v_x(0) = 0$
$v_y(0) = 0$
$v_z(0) = 0$

2.2.2. Détermination du vecteur position du centre d'inertie : équations horaires du mouvement (x(t), y(t), z(t))

Recherche des primitives

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dy(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dz(t)}{dt} = g\,t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = A' \\ y(t) = B' \\ z(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + C' \end{cases}$$

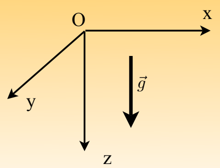
conditions initiales :

À t = 0 s, on a | $x(0) = 0$
$y(0) = 0$
$z(0) = 0$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \end{cases}$$

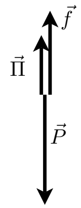
3. Situation 2 : chute dans un fluide

On étudie une bille qui tombe verticalement dans un fluide de masse volumique ρ dont en néglige pas les effets. La bille est lâchée à la date t = 0 s sans vitesse initiale : $\overrightarrow{v_0} = \begin{cases} v_{0x} &= 0 \\ v_{0y} &= 0 \\ v_{0z} &= 0 \end{cases}$.



Déterminer la vitesse limite.

3.1. Mise en équation du problème



- Système étudié : la bille
- Référentiel : un référentiel terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces qui s'appliquent sur la bille :
  - poussée d'Archimède
  - Force de frottement
  - force de la Terre sur la bille (poids de la bille).

- On applique la 2ème loi de Newton : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}(t) + \overrightarrow{\Pi} \;=\; m\,\overrightarrow{a}(t)$

donc $m\,\overrightarrow{g} - K\,v^n\,\overrightarrow{k} - m_{fluide}\,\overrightarrow{g} \;=\; m\,\overrightarrow{a}(t)$

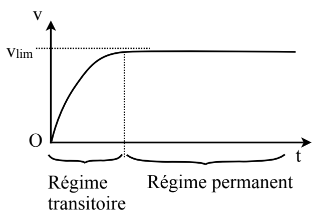
3.3. Résolution

- On projette la relation vectorielle sur les axes :

$$\overrightarrow{a}(t) = \begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{m\;g - m_{fluide}\;g - K\;v^n}{m} = \frac{(m - m_{fluide})\;g - K\;v^n}{m} \end{cases}$$

- On ne peut pas calculer facilement le vecteur vitesse et on effectue des résolutions numériques à l'aide d'ordinateurs.

3.4. Vitesse limite



Expérimentalement, on observe que la vitesse évolue de la manière ci-contre. On distingue alors le régime transitoire et le régime permanent.

On constate que la vitesse atteint une vitesse limite qui reste constante. Alors l'accélération subie par la bille est nulle et on obtient : $(m - m_{fluide})\;g - K\;v^n \;=\; 0$

Cette vitesse limite se calcule donc par : $\boxed{v_{lim} = \left(\frac{m - m_{fluide}}{K}\;g\right)^{1/n}}$