Le problème qui déchire
Exemples de mise en œuvre dans la classe

Équipe DREAM

15 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux.
Imaginons : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite.
Est-ce que je pourrais avoir 19 morceaux de papier ? 20 morceaux de papier ? 21 morceaux de papier ? 2016 morceaux de papier ?
Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?
Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite.
Est-ce que je pourrais avoir 19 morceaux de papier ? 20 morceaux de papier ? 21 morceaux de papier ? 2016 morceaux de papier ?
Et si je faisais la même opération mais en coupant chaque fois en quatre ? En cinq ?...
Quelles sont toutes les découpes qui me permettront d'avoir 19 morceaux de papier ? 20 morceaux de papier ? 21 morceaux de papier ? 2016 morceaux de papier ?
Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ? Et si je voulais atteindre 2017 ? 2018 ?

2 Compte rendu d'expérimentation en CM2-6eme

2.1 Le contexte

La circonscription REP+ de Vénissieux regroupe autour du collège Michelet les écoles primaires du Centre, Henri Wallon, Saint Exupéry et Jean Moulin. L'action soutenue par l'institution cherche à développer chez les élèves des attitudes de recherche en mathématiques en s'appuyant sur des problèmes ouverts n'engageant pas les procédures de résolution habituellement utilisées dans le cadre de la résolution de problèmes dans les classes de cycle 3. Il s'agit aussi de donner la possibilité aux élèves de vivre une situation mathématique de façon différente et les inviter à conduire une réflexion sur leurs propres procédures. Elle cherche à engager les élèves dans un travail portant sur la recherche de modalités de résolution à partir d'un problème résistant. Pour les enseignants, il s'agit d'engager sa classe dans des pratiques pédagogiques différentes et de faire vivre le réseau de la circonscription. L'idée de créer des situations d'apprentissage favorables à de nouveaux rapports enseignants/élève est sous-jacente à l'action mais aussi, le questionnement de sa pratique pédagogique dans les autres domaines d'enseignement au regard de l'observation de l'action de ses élèves au cours des séances de recherche est apparu comme un élément fort de cette action. En effet, dans le déroulement du projet, les élèves ont été amenés à chercher le problème posé « de l'extérieur de la classe » et les enseignants n'étaient plus aux yeux des élèves « ceux qui détiennent la solution » mais plutôt des organisateurs des recherches. Il est intéressant de noter que les enseignants qui ont participé au projet ont noté dans leur classe une certaine modification du contrat dans le sens où les élèves ont pris une plus grande responsabilité de leur activité, ce qui bien sûr, a pu se répercuter dans les autres moments de la classe.

2.2 La recherche du problème

C'est bien sûr le cœur du dispositif et on peut la subdiviser encore en trois temps : le temps de la découverte, le temps de recherche et le temps de relance.

Figure 1: Le travail de présentation des élèves

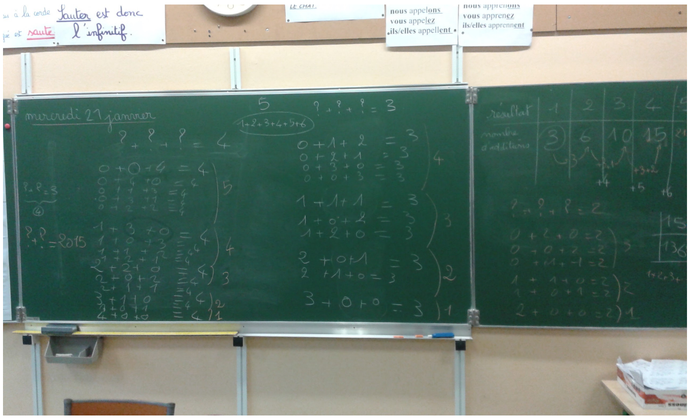

Figure 2: Le travail de présentation des élèves

Le temps de découverte est organisée en regroupant les classes par deux, une de CM2 et une de 6eme. Le chercheur propose un problème et laisse un premier temps de recherche aux enfants qui travaillent en groupes mixtes, CM2 et 6eme. Cette présentation est directement dépendante du problème qui doit permettre très rapidement de trouver quelques premiers résultats mais aussi de s'apercevoir que le problème se prolonge. Les élèves retournent alors dans leur classe et le professeur organise un temps de recherche sur deux à trois semaines. A l'issue de cette première recherche, un temps de rencontre est organisé avec toutes les classes : les enfants présentent ce qu'ils ont fait comme illustré dans la figure 1, souvent doivent expliquer le vocabulaire utilisé, les pistes suivies, quelques résultats auxquels ils sont arrivés. Dans un dialogue avec la classe, le chercheur relance les recherches en validant des résultats mais surtout des méthodes et peut fixer des objectifs plus précis de recherche liés au travail réalisé par les élèves. Ces temps de travail sont toujours excessivement intéressants et intenses comme en témoigne ce tableau rempli collectivement pendant notre rencontre (Fig.2). Les enfants commencent alors la deuxième partie de leurs recherches qui vont s'organiser autour de la préparation de la conférence finale : quels résultats doit on montrer ? Comment les présenter ? Que faut-il écrire ? Là encore ce travail est complètement orchestré par le professeur dans chaque classe.
Avec l'énoncé de départ, les élèves se sont lancés dans des expériences en découpant en 2, puis

Etape	Nombre de découpes	Nombre de morceaux
1	0	1
2	3	4
3	6	7
4	9	10
...	...	...
25	3×24	$3\times(25-1)+1 = 3 \times 24 + 1$

Table 1: Une représentation du problème

en 3, puis en 4. Très rapidement, ils ont pu écrire la suite des nombres de morceaux :
1 2 3 4 ... et en déduire que tous les nombres peuvent être atteints et qu'en particulier 2016 peut être atteint en 2015 découpages. Ce résultat est apparu dès la première rencontre, ce qui était important pour qu'ils puissent s'approprier suffisamment le problème pour continuer leurs recherches. Il a débouché également sur une question qui a été reprise par la suite et qui concerne le nombre de découpages ; s'il paraît évident que le nombre de découpages ne dépend pas du cas étudié et que si on obtient n morceaux de papier alors il y a eu n-1 découpes, ce nombre a permis aux élèves de formaliser leurs calculs et de nommer les variables : dans le cas où on découpe en n morceaux, il faut considérer le nombre de morceaux de papier, le nombre de découpes réalisées, le numéro de l'étape : voir la dépendance de ces variables est déjà un résultat tout à fait intéressant.
De plus, les élèves ont, là encore dès la première rencontre, pu examiner le cas d'une découpe en 3, faire l'expérience et écrire la suite des nombres de morceaux, 1, 3, 5, 7 ... Certains ont d'ores et déjà pu continuer la suite en remarquant que les nombres impairs apparaissent mais sans une formalisation vraiment stabilisée. Il n'empêche que cette première recherche leur a permis de s'apercevoir qu'ils pouvaient trouver des résultats et les a incité à continuer le processus, en coupant en 4, en 5, etc.
La recherche a continué avec les professeurs et la rencontre dans les classes a été un moment important de formalisation des résultats. La plupart des classes avaient préparé des posters ou des synthèses de leurs recherches et la rencontre s'est déroulée à partir de ces travaux. En particulier, le vocabulaire a été précisé et les résultats parfois donnés un peu en désordre ont été organisés dans des tableaux.
Par exemple, un résultat intéressant proposé et développé par les enfants et relancé dans la classe a été de proposer des tableaux de résultats, par exemple dans le cas d'une découpe en 4, sous la forme :

3 Production(s) d'élève(s)

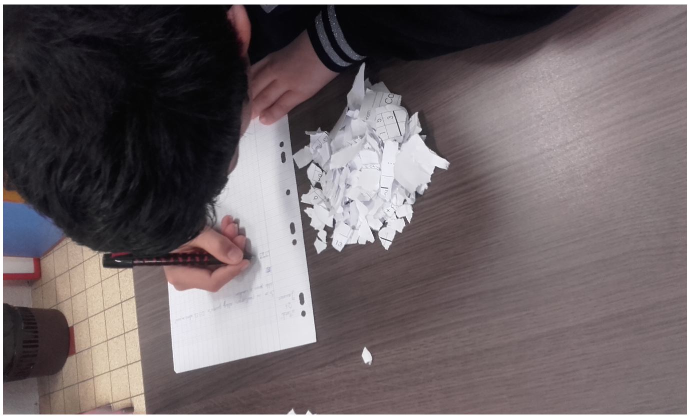

Figure 3: Travail des élèves

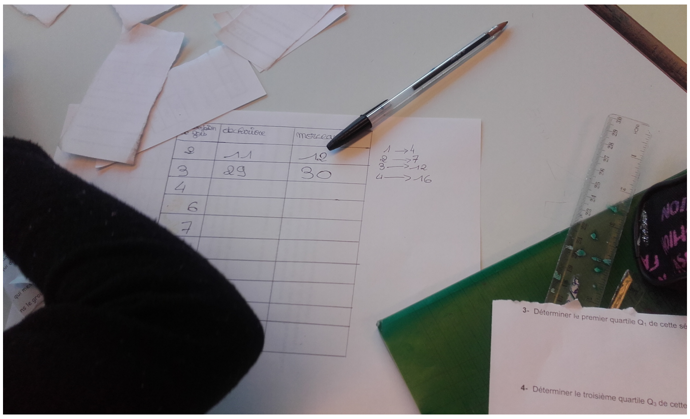

Figure 4: Travail des élèves

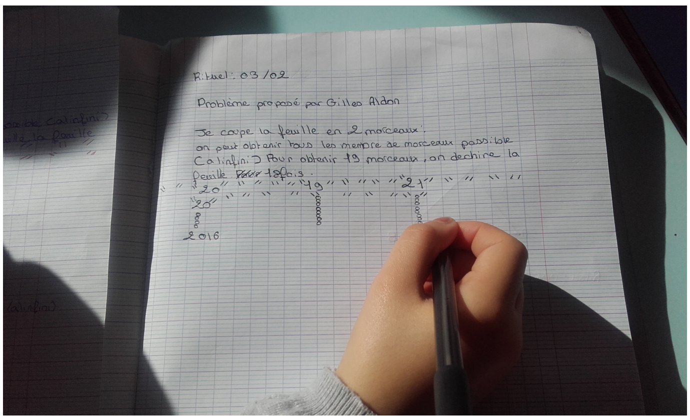

Figure 5: Travail des élèves

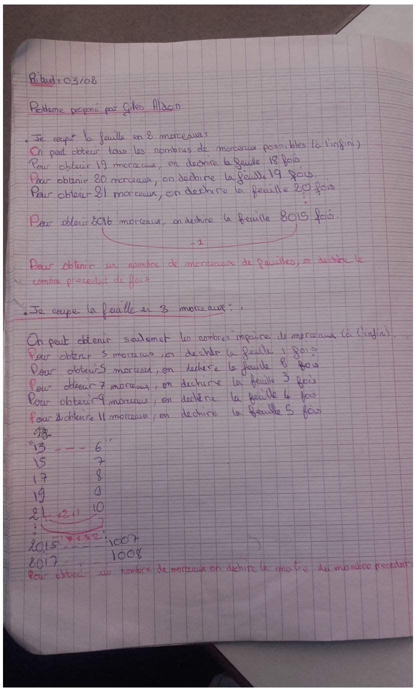

Figure 6: Travail des élèves

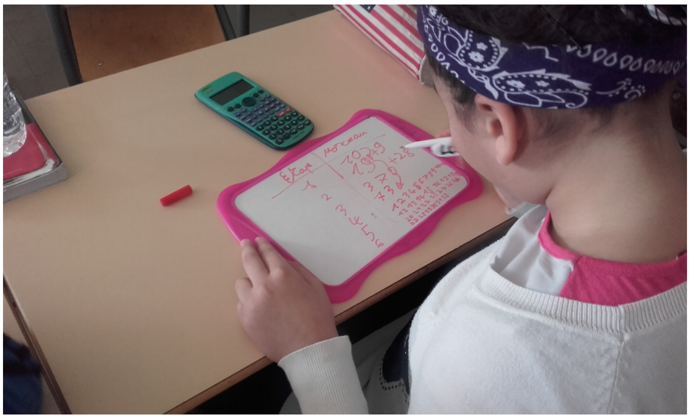

Figure 7: Travail des élèves

4 Une autre mise en œuvre

D'autres mises en œuvre ont été testées notamment comme problème ouvert du rallye mathématiques de l'Académie de Lyon pour des élèves de troisième et seconde. Il est intéressant de noter que les réactions face à ce problème ont été très similaires à celles des élèves de CM2 et sixième.
Le lecteur pourra retrouver une analyse dans le livre :
Rallye mathématiques de l'académie de Lyon : un jeu très sérieux
édité par Canope et l'IREM de Lyon.
On trouve ci-dessous une réalisation d'une classe de seconde (le code réalisé par les élèves n'est pas inclus dans ce document) :

Un problème où l'on déchire du papier : Recherches

Classe de S6 du Lycée Charles de Foucauld

Rallye des maths 2016

Présentation des recherches.

Table des matières

Première partie

1 Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?

J'essaye en premier de modéliser le processus qui a lieu à chaque fois que l'on coupe le bout de papier. Ainsi, je commence par définir une fonction qui au nombre de découpes faites (opérations) associe le nombre de morceaux de papier. Soit x le nombre de découpes faites, et soit f la fonction. Donc x correspond au nombre de découpes (combien de fois), $f(x)$ au nombre de morceaux de papier obtenus à partir de x découpes.

Lorsque nous coupons une feuille (ou un morceau) en deux, 1 nouveau morceau est créé. En effet, nous obtenons deux morceaux : un "est compté comme l'ancien", et nous disposons "d'un nouveau". Par conséquent, pour x découpes, nous aurons $x+1$ morceaux : celui d'origine et tous ceux qui sont créés.

Nous pouvons donc écrire et utiliser : $f(x) = x + 1$. Ce n'est pas une fonction générique pour la première partie (elle sera définie plus tard).

Ceci obtenu, je résous une équation tirée de cette expression pour calculer le nombre de découpes en connaissant le nombre de morceaux (2016).

$$f(x) = x + 1 \Leftrightarrow 2016 = x + 1 \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow x = 2016 - 1 \tag{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 2015 \tag{3}$$

Donc nous devons faire cette opération 2015 fois.

2 Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux en coupant en trois morceaux chaque morceau ?

J'adapte la fonction pour prendre en compte le nombre de morceaux créés à chaque découpe, et ainsi qu'elle devienne générique pour la première partie. Soit m le nombre correspondant au nombre de découpes de chaque morceau (par combien je découpe chaque morceau à chaque fois que je coupe). Quand je coupe en 2, à chaque fois, un nouveau morceau est "ajouté". Ainsi, en coupant en trois, 2 nouveaux morceaux sont ajoutés. Il y a donc $m-1$ morceau(x) ajouté(s) à chaque opération (découpe). La fonction devient alors : $f(x) = (m-1)x + 1$

Dans notre cas, $m = 3$, et nous résolvons la même équation pour savoir combien de découpes je dois faire pour obtenir 2016 morceaux. Si ce n'est pas un nombre entier, ce n'est donc pas possible, car on ne peut faire des découpes "à moitié".

$$\begin{align}
f(x) = (m-1)x + 1 &\Leftrightarrow 2016 = 2x + 1 \tag{4}\\
&\Leftrightarrow 2016 - 1 = 2x \tag{5}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{2015}{2} \tag{6}\\
&\Leftrightarrow x = 1007.5 \tag{7}
\end{align}$$

Nous constatons que x n'est pas un nombre entier, donc il est impossible d'obtenir 2016 en coupant chaque fois en 3.

3 Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux en coupant en quatre morceaux, en cinq morceaux chaque morceau ?

De la même manière, je résous l'équation avec $m = 4$ puis $m = 5$.

Si $m = 4$:

$$\begin{align}
f(x) = (m-1)x + 1 &\Leftrightarrow 2016 = 3x + 1 \tag{8}\\
&\Leftrightarrow 2016 - 1 = 3x \tag{9}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{2015}{3} \tag{10}\\
&\Leftrightarrow x = 71.\overline{66} \tag{11}
\end{align}$$

Si $m = 5$:

$$\begin{align}
f(x) = (m-1)x + 1 &\Leftrightarrow 2016 = 4x + 1 \tag{12}\\
&\Leftrightarrow 2016 - 1 = 4x \tag{13}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{2015}{4} \tag{14}\\
&\Leftrightarrow x = 503.75 \tag{15}
\end{align}$$

Nous constatons qu'il n'est pas possible, ni en coupant en 4 morceaux, ni en coupant en 5 morceaux d'obtenir 2016.

4 Quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ?

Le but est ici de trouver tous les valeurs possibles de m tel que $\frac{2016-1}{m-1} \in \mathbb{N}$
Si l'on simplifie l'expression, on obtient $\frac{2015}{m-1} \in \mathbb{N}$
Soit $d = m - 1$, $\frac{2015}{d} \in \mathbb{N}$

Comment trouver toutes les valeurs possibles de d pour que la division de 2015 par d donne un résultat entier ? Il suffit de trouver (et calculer) tous les diviseurs de 2015, puis de retrouver m : $d = m - 1 \Leftrightarrow m = d + 1$

Pour cela, j'utilise des théorèmes de l'arithmétique ; je décompose en premier lieu 2015 en produit de facteurs premiers (algorithme naïf) :
$\frac{2015}{2} \notin \mathbb{N}$ donc on essaye de diviser par 3,
$\frac{2015}{3} \notin \mathbb{N}$ donc on essaye de diviser par 5,
$\frac{2015}{5} = 403 \in \mathbb{N}$ donc on continue de diviser par 5,
$\frac{403}{5} \notin \mathbb{N}$ donc on essaye de diviser par 7,
$\frac{403}{7} \notin \mathbb{N}$ donc on essaye de diviser par 11,
$\frac{403}{11} \notin \mathbb{N}$ donc on essaye de diviser par 13,
$\frac{403}{13} = 31 \in \mathbb{N}$ donc on s'arrête car $13^2 > 31$, et 31 est un nombre premier,
On peut donc conclure que $2015 = 5 * 13 * 31$

Ensuite je calcule tous les diviseurs de 2015 (cela est relativement simple pour 2015) :
$5^0 * 13^0 * 31^0 = 1$

$5^1 * 13^0 * 31^0 = 5$
$5^0 * 13^1 * 31^0 = 13$
$5^0 * 13^0 * 31^1 = 31$

$5^1 * 13^1 * 31^0 = 65$
$5^1 * 13^0 * 31^1 = 155$
$5^0 * 13^1 * 31^1 = 403$

$5^1 * 13^1 * 31^1 = 2015$
Pour conclure, 2015 possède 8 diviseurs ($(1 + 1) * (1 + 1) * (1 + 1) = 2^3 = 8$) : 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403 et 2015.

Maintenant que j'ai obtenu toutes les valeurs de d possibles, je calcule toutes les valeurs de m possibles, à partir de d :
$m = 1 + 1 = 2$ ou $m = 5 + 1 = 6$ ou $m = 13 + 1 = 14$ ou $m = 31 + 1 = 32$ ou $m = 65 + 1 = 66$ ou $m = 155 + 1 = 156$ ou $m = 403 + 1 = 404$ ou $m = 2015 + 1 = 2016$
Donc les valeurs de m possibles sont : 2, 6, 14, 32, 66, 156, 404, 2016.

Cela signifie que les découpes permettant d'obtenir 2016 morceaux sont 2, 6, 14, 32, 66, 156, 404, ou 2016 morceaux.

5 Quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2015, 2017, 2018 morceaux ?

Tout d'abord, je fais un petit programme informatique me facilitant la tâche, et de la même manière que pour trouver les découpes pour 2016, je cherche les découpes permettant d'obtenir 2015, 2017, 2018 morceaux. Faire un programme informatique permet de vérifier que l'on a bien su généraliser la résolution de la question du problème (cf l'autre pièce jointe de l'email).

Ainsi, pour 2015, je trouve : 2, 3, 20, 39, 54, 107, 1008, 2015 (8 découpes possibles).
Pour 2017, je trouve : 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 17, 19, 22, 25, 29, 33, 37, 43, 49, 57, 64, 73,

85, 97, 113, 127, 145, 169, 225, 253, 289, 337, 505, 673, 1009, 2017 (36 découpes possibles).
Pour 2018, je trouve : 2, 2018 (car 2017 est un nombre premier) (2 découpes possibles).

Actuellement, j'ai codé le programme en C#, et il fonctionne. On lui donne un nombre n et il donne les découpes possibles. Cependant, quelques améliorations sont encore possibles, comme utiliser le multithreading ou des algorithmes moins naïfs pour diminuer la complexité de l'algorithme.

Voici (pour ceux qui s'y connaissent ou pour les curieux) le code ; ce n'est qu'un brouillon et de nombreux points peuvent être améliorés au niveau du code (version du code 29/01/2016 20 :00) : cf A, page 13.

6 Si je voulais atteindre un nombre n de morceaux, quelles seraient les découpes qui me permettraient de l'atteindre ?

Ceci est très simple à faire : je remplace 2016 par n, en utilisant la même méthode, que celle vue précedemment, et j'effectue les calculs pour trouver toutes les découpes qui permettraient de l'atteindre. En programmant l'algorithme, j'ai bien pu constater que la méthode était générique et j'ai remplacé 2016 par n. Si vous le souhaitez, vous pouvez essayer le programme pour tester toutes les valeurs que vous voulez, ou vous pouvez examiner le code source pour voir la résolution avec des lettres (variables).

Cela peut se résumer ainsi :
- je calcule $(n-1)$,
- je cherche tous les diviseurs de $(n-1)$, en décomposant $(n-1)$ en facteurs premiers,
- à chaque diviseur de $(n-1)$ j'ajoute 1 pour retrouver toutes les valeurs de m possibles.

Deuxième partie

7 Est-ce que je peux atteindre 2016 en coupant en 2 ou en 3 parties ? De combien de façons différentes ?

Pour répondre à cette question, je suis parti de l'expression de la première partie. J'ai quitté la notion de fonction (au fait, le problème pourrait s'écrire sous forme d'une suite dans la première partie). J'ai utilisé la même signification des lettres pour ce qui va suivre.

Ici, le "nouveau" paramètre à prendre en compte est le fait que l'on peut couper *soit* en 2 parties, *ou soit* en 3 parties. Aussi je mets sous forme d'équation ce problème. En réutilisant les notations de la précédente partie, et en donnant $a = 2 - 1$, $b = 3 - 1$ et $c = 2016 - 1$, cela donne : $ax + by = c \Leftrightarrow 1x + 2y = 2015$, avec x et y le nombre de fois à couper respectivement en 2 et 3 morceaux. J'en déduis qu'il peut y avoir aucune ou plusieurs solutions.

Après quelques recherches, je trouve que cela correspond *aux équations diophantiennes* de la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont des entiers relatifs connus. J'utilise tout d'abord le théorème de Bachet-Bézout et le PGCD avec l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple de solutions (si c'est possible).

Je détermine le $PGCD(a, b) = 1$, et je constate que $c \, mod \, PGCD(a, b) = 0 \Leftrightarrow$ c est divisible par 1. Il y a donc une infinité de solutions pour x et $y \in \mathbb{Z}$. Aussi $a = 1$ et $b = 2$ sont premiers entre eux. Ainsi, il n'y a pas de "simplification à faire". En remontant l'algorithme d'Euclide pour calculer $PCGD(a, b)$, je trouve un couple de solutions :

$$
\begin{align}
PGCD(1,2) &= 1 \tag{16}\\
2 &= 1*2+0 \tag{17}\\
\tag{18}\\
1 &= 2*1-1*1 \tag{19}\\
\tag{20}\\
1*2015 &= 2*1*2015-1*1*2015 \tag{21}\\
2015 &= 1*(-2015)+2*2015 \tag{22}\\
2015 &= -2015+4030 \tag{23}
\end{align}
$$

Donc un des couples qui résout l'équation $1x + 2y = 2015$ est $(-2015; 2015)$.

Ensuite, avec le lemme de Gauss, je détermine les valeurs de x et de y en fonction d'un entier relatif k :

$$
\begin{align}
x &= x_0 + \frac{kb}{d} \tag{24}\\
y &= y_0 - \frac{ka}{d} \tag{25}
\end{align}
$$

avec x_0 et y_0 issu du couple de solutions trouvé en remontant l'algorithme d'Euclide, après avoir factorisé, et $d = PGCD(a, b)$.

Par conséquent :

$$
\begin{align}
x &= -2015 + 2k \tag{26}\\
y &= 4030 - k \tag{27}
\end{align}
$$

Nous cherchons maintenant toutes valeurs de x et de y telles qu'elles soient supérieures ou égales à 0, c'est à dire qu'elles appartiennent à $\mathbb{N}$ (on ne peut pas couper un nombre de fois négatif). Ainsi nous résolvons deux inéquations pour obtenir un encadrement de k, si c'est possible avec x et y positifs.

$$
\begin{align}
x \geq 0 &\Leftrightarrow -2015 + 2k \geq 0 \tag{28}\\
&\Leftrightarrow k \geq 1008 \tag{29}
\end{align}
$$

(arrondi à l'unité supérieure car $k \in \mathbb{Z}$), et

$$
\begin{align}
y \geq 0 &\Leftrightarrow 2015 - k \geq 0 \tag{30}\\
&\Leftrightarrow k \leq 2015 \tag{31}
\end{align}
$$

Ainsi, à la place d'une infinité de solutions, nous avons $(kmax - kmin) + 1 = nbfacons \Leftrightarrow (2015 - 1008) + 1 = 1008$ solutions pour obtenir 2016 morceaux en coupant en 2 ou en 3. A chaque fois, j'incrémente k de 1 en partant de 1008. Je peux soit recalculer x et y en fonction de

k, ou une fois la première incrémentation calculée, je peux à x ajouter $\frac{+b}{PGCD(a,b)}$ et à y ajouter $\frac{-a}{PGCD(a,b)}$, ou inversement, ceci pendant 1007 fois. Quelques valeurs de x et de y possible :

$$\begin{aligned}
k &= 1008 : && (32)\\
x &= 1 && (33)\\
y &= 1007 && (34)\\
solution &: (1; 1007) && (35)\\
& && (36)\\
k &= 1009 : && (37)\\
x &= 1 + 2 = 3 && (38)\\
y &= 1007 - 1 = 1006 && (39)\\
solution &: (3; 1006) && (40)\\
& && (41)\\
&... && (42)\\
& && (43)\\
k &= 2015 : && (44)\\
x &= 2015 && (45)\\
y &= 0 && (46)\\
solution &: (2015; 0) && (47)
\end{aligned}$$

8 Est-ce que je peux toujours atteindre 2016 en coupant en 3 ou en 4 parties, en 6 ou 8 parties ? ... Est-ce que je peux toujours obtenir 2016 morceaux de papier ? De combien de façons différentes ?

Maintenant, je peux faire un algorithme calculant les façons possibles si je coupe en 3 ou 4 parties, ou en 6 et 8, et si je continue dans la même logique, 12 et 16, 24 et 32... Ces nombres sont toujours premiers entre eux (une fois un soustrait, bien sûr). Pour coder le programme, je traduis la méthode de résolution ci-dessus en algorithme.

J'ai codé le programme en C# aussi, et il fonctionne. Voici (pour ceux qui s'y connaissent ou pour les curieux) le code ; ce n'est qu'un brouillon et de nombreux points peuvent être améliorés au niveau du code (version du code 08/03/2016 20 :57) : cf B, page 16.

Ainsi j'ai pu constater que l'on peut atteindre 2016 de multiples façons différentes et avec des "paires" (ex : 3 ou 4 parties, 2 ou 3 parties) différentes, mais que cela n'est pas toujours possible, par exemple avec 5 et 9 (parties), car leur PGCD ne divise pas 2016 - 1 (le PGCD de a et b doit être égal à un des diviseurs de c (cf la question de la première partie)).

Voici les résultats (si vous testez avec le programme, vous aurez le détail de toutes les façons possibles) :
- 3 et 4 : 336 façons différentes ;
- 5 et 9 : impossible d'atteindre 2016 ;
- 6 et 8 : 58 façons différentes ;
- 12 et 16 : 12 façons différentes ;

- 24 et 32 : 3 façons différentes ;
- 48 et 64 : 1 façon différente ;
- 96 et 128 : 0 façon différente (des solutions existent mais ne remplissent pas les conditions $x > 0$ et $y > 0$).

Voici les résultats avec 2017 maintenant :
- 3 et 4 : 337 façons différentes ;
- 5 et 9 : 253 façons différentes ;
- 6 et 8 : 58 façons différentes ;
- 6 et 11 : impossible d'atteindre 2017 ;
- 12 et 16 : 12 façons différentes ;
- 24 et 32 : 3 façons différentes ;
- 48 et 64 : 1 façon différente ;
- 96 et 128 : 0 façon différente (des solutions existent mais ne remplissent pas les conditions $x \geq 0$ et $y \geq 0$).

9 Et si je choisis un entier n. Pourrais-je toujours découper ma feuille pour avoir à un certain moment n morceaux de papier ? Et de combien de façons différentes ?

Tout d'abord, pour répondre à la première partie de la question, il faut, comme nous l'avons vu, selon la paire a et b qui est donnée (ne pas oublier de soustraire 1 pour avoir a et b), que le $PGCD(a, b) \mid (n - 1)$ (cela renvoie à la première partie, car le $PGCD(a, b)$ doit être un des diviseurs de $(n - 1)$) et qu'une fois les deux inéquations "de k" résolues, il y ait toujours un encadrement de k valable, c'est à dire que des couples de solutions avec x et y positifs soient possibles (si par exemple $k < 40$ et $k > 45$, alors ce n'est pas valable). C'est parfois possible, parfois non.

Ensuite, pour calculer le nombre de façons différentes d'obtenir n avec la "paire" donnée, si c'est possible, il suffit d'appliquer la formule vue plus haut : $(kmax - kmin) + 1 = nbfacons$.

Voici un résumé détaillé des opérations à effectuer avec un nombre entier n :
- déterminer le PGCD de a et de b donnés ;
- vérifier que ce PGCD divise $(n - 1)$. Si ce n'est pas le cas : il n'y a pas de solutions ;
- faire que $a, b, (n - 1)$ soient premiers entre eux, en les divisant si besoin est par le PGCD calculé ;
- retrouver un couple de solutions en remontant l'algorithme étendu d'Euclide ;
- déterminer les solutions en fonction de k d'après le lemme de Gauss ;
- résoudre $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Si l'encadrement de k n'est pas valable : il n'y a pas de solutions ;
- calculer le nombre de façons différentes ($(kmax - kmin) + 1 = nbfacons$) ;
- les calculer si l'on veut en incrémentant k de 1 à chaque fois, ou en ajoutant $\frac{+b}{PGCD(a,b)}$ et $\frac{-a}{PGCD(a,b)}$ ou inversement (cf la précédente question).

Cela revient à calculer (à arrondir ensuite) : $nb = (\frac{y_0 * d}{a} - \frac{-x_0 * d}{b}) + 1$ si $x < y$.

Après quelques recherches, j'ai aussi trouvé une conjecture pour calculer le nombre de façons différentes sans avoir à remonter le PGCD, résoudre des inéquations... Cependant, je ne sais pas la démontrer. Soit q et p les parties données. Si nous avons $a = q-1, b = p-1, c = n-1$, on calcule en premier $d = PGCD(a,b)$ puis on vérifie qu'il divise n. Si c'est le cas, on divise c par $(d * \frac{a}{d} * \frac{b}{d})$. Si c'est un nombre déjà entier, on soustrait un. Sinon, on arrondit par défaut, sauf si a ne divise pas c ni b ne divise pas c (dans ce cas là, on arrondit au plus proche). Ensuite, on ajoute 1 si a divise c et encore 1 si b divise c. Si ce résultat vaut 0 (ou que le PGCD calculé ne divise pas n), il n'y a pas de solutions ; sinon, nous avons notre nombre de façons différentes !

Cela revient à écrire, avec nb le nombre de façons différentes :
$d = PGCD(a,b)$;
Si $d \mid c$, alors $nb = \frac{c}{d * \frac{a}{d} * \frac{b}{d}}$;
On arrondit au plus proche nb, si $a \nmid d$ ni $b \nmid d$;
Sinon, on arrondit par défaut nb, et si c'est un nombre entier on soustrait 1 ;
Si $a \mid c$, alors $nb = nb + 1$;
Si $b \mid c$, alors $nb = nb + 1$;
Si d ne divise pas c ou $nb = 0$, alors il n'y a pas de solutions.

Par exemple, si je prends $c = 1000$ (donc $n = 1001$), $a = 6$ et $b = 4$ (donc en 5 ou 7 parties), on a $d = PGCD(a,b) = 2$, donc $nb = \frac{1000}{2 * \frac{6}{2} * \frac{4}{2}} = 83.\overline{33}$. b divise c, donc $nb = 84$. Il y a donc 84 façons différentes.

On peut aussi effectuer ce calcul avec la décomposition en produit de facteurs premiers. Je décompose a, b, je trouve le PGCD de a et b (le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b). Et je divise c par le produit des décompositions en facteurs premiers de a, b et d divisé par d au carré. Cela se simplifie et le calcul est simple et rapide. Dans l'exemple ci-dessus, il faudrait alors diviser c par : $\frac{2^1 * 3^1 * 2^2 * 2^1}{(2^1)^2} = 3^1 * 2^2 = 12$.

Cependant, j'ai testé beaucoup de nombres différents, et j'ai vu que la conjecture était vraie pour la plupart, mais que pour quelques-uns (1001 (1000), 48 (47), 49 (48) ; 1000 (999), 50 (49), 51 (50) ; 1001 (1000), 49 (48), 54 (53)...), l'arrondi causait des différences de ± 1 avec le vrai nombre de façons différentes. J'ai tenté de changer la façon d'arrondir, mais dans ce cas ce sont d'autres tests qui deviennent faux. Peut-être qu'amener ce résultat par une démonstration permettrait d'être sûr et de couvrir tous les cas.

J'ai donc suivi une autre piste de recherche, celle de la représentation graphique d'une équation diophantienne. Cela donne une droite de la forme $ax + by = c \leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Après des observations, j'ai remarqué qu'il y avait beaucoup de relations entre les différents éléments de la représentation graphique. J'ai alors encore fait une hypothèse, proposant que la conjecture est vraie seulement si a et b sont inférieurs à la racine carrée de c ou s'ils sont supérieurs, leur PGCD est supérieur à 1. Donc si $PGCD(a,b) = 1$ et a et b sont supérieurs à $\sqrt{c}$, il faut se méfier. Sur la représentation graphique, nous remarquons que les solutions de l'équation sont les points sur la droite de coordonnées entières. Si $PGCD(a,b) \mid c$, il y a à intervalle régulier des couples de solutions. Et en ce qui concerne notre problème, pour que nous trouvions une solution, il faut que ce point soit situé (sur la droite) au-dessus ou sur l'axe des abscisses et à droite ou sur l'axe des ordonnées (cf Figure 1).

Nous constatons que le résultat de la division (lorsque $PGCD(a,b) \mid c$) correspond au rapport de la longueur du segment de la droite situé dans la bonne "zone" par la distance entre deux points "solutions" de l'équation. Quand le résultat de la division est inférieure à 1 et que les conditions ($PGCD(a,b) = 1$ et a et b sont supérieurs à $\sqrt{c}$) sont réunis, la distance entre

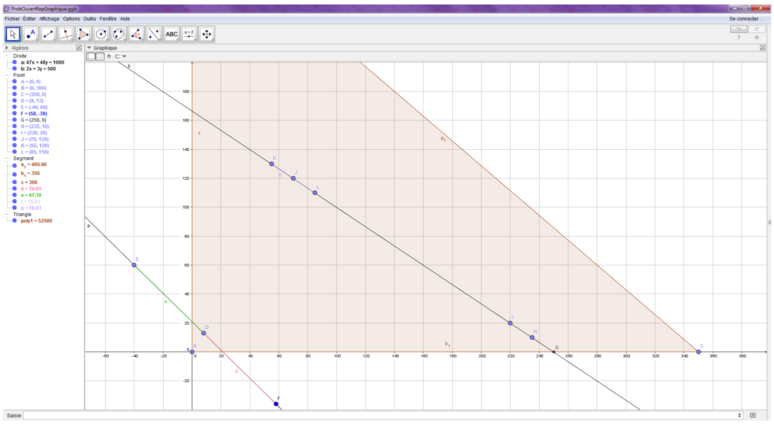

FIGURE 1 – Représentation graphique depuis GéoGebra

deux points "solutions" est supérieures à la "zone" de solution. Cela signifie qu'il peut avoir une solution, c'est-à-dire un point de coordonnées entières de la droite dans cette "zone", ou il ne peut ne pas en y avoir : il est hors de cette "zone". Pour savoir cela, il suffit de résoudre un petit système :

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ x + y &= \frac{c}{(a+b)/2}(arrondi) \end{cases}$$

Si x et y sont positifs, alors il y a une solution, sinon il n'y en a pas. Ou sinon, on peut calculer directement $s = \frac{\frac{c-ad}{b-a}}{\frac{c-bd}{a-b}}$ avec $d = \frac{c}{(a+b)/2}$ (arrondi au plus proche). Si s est positif, il y a une solution, sinon aucune. Cependant, ces calculs ne fonctionnent pas quand la différence entre b et a (ou a et b) est supérieure à 1 (donc 2, 3, 4...). Ainsi, il y a toujours un point à combler : soit en procédant par une démonstration de tout cela, soit en continuant de chercher... Si vous souhaitez être sûr du nombre de façons différentes, procéder par la méthode complète... En attendant d'avoir démontrer cette conjecture, si elle peut se compléter et se démontrer...

Toutefois, je pense que j'ai résolu le dernier point incorrect (par l'approche de la date limite, je n'ai pas pu continuer mes recherches, approfondir mes dires, et terminer d'organiser ce dernier point). Il faut calculer la différence g entre b et a (dans tout ce que je calcule, j'intervertis toujours a et b pour que a soit inférieur à b). On divise ensuite c par la demi-somme de a et de b. On arrondit le résultat trouvé au plus proche multiple de g, cela donne h. Si ensuite $\frac{c-h*a}{g}$ donne un nombre entier et positif, alors on peut ensuite calculer x et trouver le couple de solutions et donc il y a 1 "façon différente". Sinon, il n'y pas pas de solution pour notre problème.

Pour constater ces dires, vous pouvez tester le programme fourni. Il utilise, comme expliqué plus haut, la démarche que nous avons vue au début de la deuxième partie.

10 Est-ce que je peux toujours découper ma feuille pour avoir à un certain moment n morceaux de papier ? Et de combien de façons différentes ? (autre interprétation)

J'ai essayé de comprendre sous un autre angle la question. Il faudrait alors trouver toutes les façons d'obtenir n morceaux, en coupant par exemple qu'en x découpes, ou en y, ou en coupant en z ou v découpes, ou en coupant en z ou v ou w découpes... La réponse est donc oui pour la première question pour $n > 1$. Par contre, calculer toutes les façons différentes "de ce type-là" est plus compliqué !

On pourrait pour cela (je pense) essayer de généraliser la résolution de l'équation diophantienne si l'on a o termes dans le membre gauche, où o est égal au nombre de morceaux (n) moins 1 à obtenir. Cela donnerait une équation de la forme : $1x + 2y + 3z + ... + (o-1)v + ow = o$.

Cela complique la résolution et je réfléchis et recherche actuellement comment procéder.

Pour essayer de cerner le problème sous tous ces angles, j'ai fait là aussi un petit algorithme qui décompose le nombre récursivement et détermine toutes les manières possibles de l'atteindre. Cependant, il devient vite inefficace dès que n est supérieur à 20. Voici (pour ceux qui s'y connaissent ou pour les curieux) le code ; ce n'est qu'un brouillon et de nombreux points peuvent être améliorés au niveau du code (version du code 11/03/2016 16 :46) : cf C, page 23.

Voici quelques exemples :
- $n = 5$, il y a 5 façons différentes de l'atteindre en coupant parfois en 2, en 3, en 4...
- $n = 9$, il y a 22 façons différentes de l'atteindre en coupant parfois en 2, en 3, en 4...
- $n = 14$, il y a 101 façons différentes de l'atteindre en coupant parfois en 2, en 3, en 4...
- $n = 19$, il y a 385 façons différentes de l'atteindre en coupant parfois en 2, en 3, en 4...

Je n'ai, à ce jour, pas trouvé de relation "directe" entre n et le nombre de façons différentes à partir de n... Cet énoncé semble toucher au domaine des combinaisons, des suites, de l'arithmétique modulaire...

A ce jour, j'ai trouvé que cela correspondait à la *partition d'un entier*, qui a l'air d'être un domaine d'étude très intéressant. Cependant, je n'ai pas eu beaucoup le temps d'approfondir cette question. Il me semble tout de même que l'algorithme que j'utilise dans le programme soit un des algorithmes de décomposition existant pour déterminer la partition d'un entier.

Pour terminer, il serait aussi intéressant de déterminer toutes les "paires" (a, b) possibles pour obtenir un nombre de morceaux (n) et d'additionner toutes les façons différentes pour chaque paire trouvée. Ce serait déjà un peu moins compliqué que cette dernière question, mais plus compliqué que les autres.