Le Problème des Allumettes

Connaissances et compétences attendues en lien avec le programme

Utiliser le calcul littéral	
• Notion de variable, d'inconnue • Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture. • Développer des expressions algébriques dans des cas très simples.	Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant des formules

Compétences mathématiques principalement mobilisées

Chercher	• S'engager dans une démarche, observer, questionner, émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples • Tester, essayer plusieurs pistes de résolution
Modéliser	• Traduire en langage mathématiqe une situation réelle
Raisonner	• Mener collectivement une investigation en prenant en compte le point de vue d'autrui
Calculer	• Calculer en utilisant le langage algébrique
Communiquer	• Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique • Exprimer à l'oral et à l'ecrit, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange

Contenu

I- Analyse de la situation

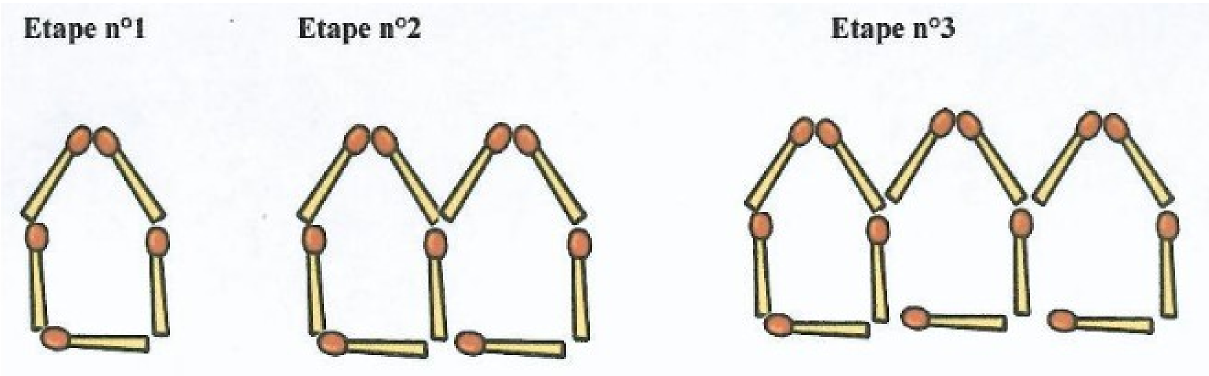
II- Mise en œuvre de la situation

III- Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

Doc 1

Thème : analyse de la situation

Enoncé du problème :
On représente par étape des maisons à l'aide d'allumettes.



1) Combien faudra-t-il d'allumettes à l'étape 4 ? à l'étape 10 ?
2) Combien faudra-t-il d'allumettes à l'étape 2019 ?
3) Généraliser la formule : combien faudra-t-il d'allumettes à l'étape n ?

Solution mathématique :

1) Etape 4 : 17 allumettes sont nécessaires.
   Etape 10 : 41 allumettes sont nécessaires.
2) Etape 2019 : 8077 allumettes sont nécessaires.
3) La formule réduite est : $4n + 1$

Les mathématiques en jeu :

- Dénombrement
- Utilisation de la lettre pour généraliser une formule
- Récursivité
- Distributivité pour comparer les différentes formules obtenues

Doc 2

Thème : mise en oeuvre de la situation

➔ **1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 20 min)**

Temps de présentation du déroulement de la séance (5 min) : on précise que toutes les phases sont importantes et doivent être respectées, à commencer par la phase de recherche individuelle.

Présentation du problème (5 min) : lecture collective de l'énoncé et réponse aux premières questions afin de s'assurer que tous peuvent commmencer la recherche.

Recherche individuelle (10 min) : première phase de recherche, réponse individuelle aux questions par le professeur si nécessaire.

➔ **2ème phase : recherche en groupe (1 à 2 heure(s))**

Discussion autour des résultats trouvés par chacun lors de la recherche individuelle. Validation ou non des conjectures par le groupe. Discussion autour de la méthode.

L'enseignant circule dans les groupes, encourage à poursuivre la recherche, répond aux questions sans pour autant valider ou non les démarches entrprises.

Rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

➔ **3ème phase : présentation des résultats et débat (1 heure)**

Chaque groupe vient au tableau présenter son affiche : l'accent est mis sur la méthode.

➔ **4ème phase : bilan de la recherche (1 heure)**

A partir des résultats proposés par les élèves :

- on distingue les différentes méthodes utilisées pour aboutir à la formule
- on discute de la validité de ces méthodes
- on introduit la nécessité de comparer les formules obtenues car certaines méthodes identiques n'ont pas abouti à la même formule (erreur lors de la tradcution en langage algébrique)

Tous ces éléments sont discutés, puis un bilan commun est écrit dans le cahier d'exercices.

Doc 3

Thème : proposition de « plan »

Bilan de la recherche : les réponses des élèves

- Toutes les maisons contiennent quatre allumettes, sauf la première qui en contient cinq. On a donc les cinq allumettes de la première maison et 4 x (n-1) allumettes pour les autres maisons. Donc la formule est : **5 + 4 x (n – 1)**
- Toutes les maisons contiennent quatre allumettes, sauf la première qui en contient cinq, donc on compte 4 x n et on ajoute la cinquième allumette de la première maison.
  La formule est donc : **4 x n + 1**
- On considère que toutes les maisons ont cinq allumettes, donc on a au total 5 x n allumettes. Puis on elève une allumettes par maison, sauf pour la première.
  La formule est donc : **5 x n – (n – 1)**

Vérification des conjectures et méthodes proposées

Chaque méthode est validée par la classe. Pour certaines méthodes identiques, des groupes ont obtenu des formules différentes. Dans ce cas, le passage par un test numérique (n = 3 par exemple) permet très vite d'invalider les formules fausses.
Un débat est alors engagé sur le statut de l'exemple et du contre-exemple : un contre-exemple peut démontrer qu'un résultat est faux mais un exemple ne suffit pas à démontrer qu'un résultat est vrai.

Bilan du problème

Pour permettre aux élèves de comprendre que toutes leurs formules sont correctes et équivalentes, il est alors nécessaire de faire appel aux techniques de distributivité travaillées précédemment en classe. L'accent est mis sur la nécessité de maitriser ces techniques afin de faire des démonstrations. Les élèves sont invités à développer et réduire les expressions littérales, et donc à constater que toutes les expressions sont égales à 4n + 1.

A la suite de ce problème, d'autres exercices de traduction d'un cas concret à l'aide d'une expression littérale sont proposés aux élèves afin d'automatiser l'utilisation de la lettre pour l'expression d'un cas général.