La boite sans couvercle

Equipe DREAM

14 juillet 2020

Table des matières

1 Le problème mathématique

Cette situation mathématiques peut se présenter sous différentes formes. La version présentée en premier temps est plus ouverte. La version présentée en second temps à la fin du document est plus cadrée mais permet une preuve plus accessible.

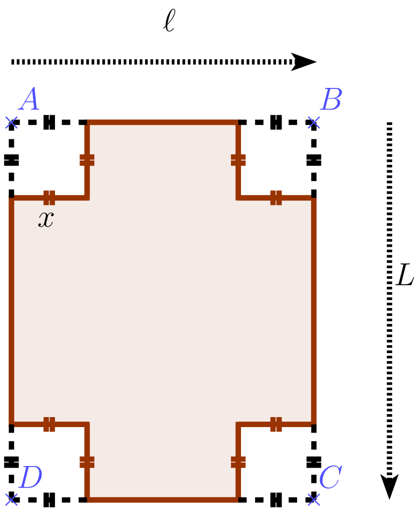
1.1 L'énoncé

À partir d'une feuille de papier au format $A4$, on veut construire le patron d'une boite sans couvercle qui a la forme d'un parallélépipède rectangle et qui a le plus grand volume possible. Quelles sont ses dimensions ?

1.2 Des pistes de solution

1.2.1 Un patron optimal pour un volume optimal

Recherche du patron optimal Nous allons considérer que le patron a une forme classique « en croix » comme indiqué sur le schéma suivant :



Notons $V_{L,\ell}$ la fonction donnant le volume de la boite sans couvercle ci-dessus en fonction de la hauteur x.

$$\forall x \in \left[0, \min\left(\frac{\ell}{2}, \frac{L}{2}\right)\right], \quad V_{L,\ell}(x) = (L-2x)(\ell-2x)x.$$

La fonction $V_{L,\ell}$ est définie et continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes. Il existe $x_0 \in \left[0, \min\left(\frac{\ell}{2}, \frac{L}{2}\right)\right]$ tel que le volume $V_{L,\ell}(x_0)$ est maximal.

Si on veut construire notre patron sur notre feuille $A4$, on obtient les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \leq \ & L \ \leq 29{,}7 \\ 0 \leq \ & \ell \ \leq 21 \end{aligned}$$

et il est assez évident de montrer que :

$$V_{29{,}7,21}(x_0) \geq V_{L,\ell}(x_0)$$

ce qui nous amène directement à chercher le maximum de la fonction $V_{29,7,21}$. Par la suite, on notera V cette fonction.

Recherche du volume maximal. Pour tout $x \in [0; 10{,}5]$,

$$\begin{aligned} V(x) &= (29{,}7 - 2x)(21 - 2x)x \\ V'(x) &= 12x^2 - 202{,}8x + 623{,}7 \end{aligned}$$

V' est une fonction polynomiale du second degré, son discriminant Δ est égal à 11190,24. Elle admet donc deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{202{,}8 - \sqrt{\Delta}}{24} \approx 4{,}0423 \text{ et } x_2 = \frac{202{,}8 + \sqrt{\Delta}}{24} \approx 12{,}86$$

Seule la racine x_1 appartient au domaine de définition que nous avons considéré. Le volume maximal est donc atteint quand la hauteur de la boite mesure environ 4 cm et est approximativement égal à :

$$V(x_1) \approx 1128{,}495.$$

1.2.2 Les différents types de patrons

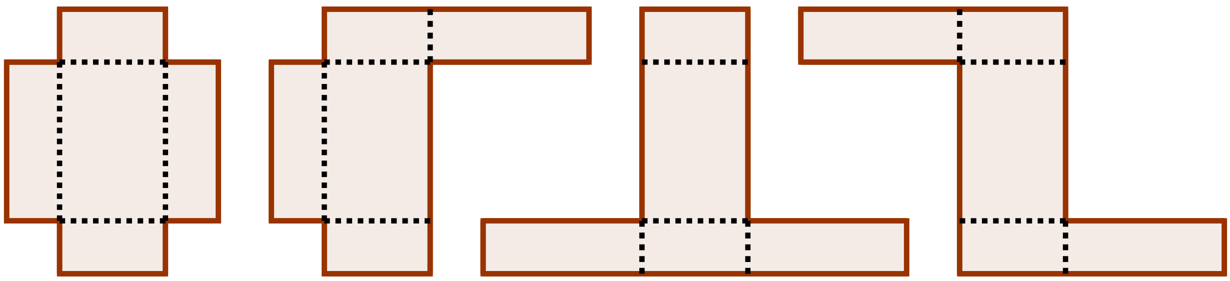
Une boite parallélépipèdique sans couvercle est composée de 5 faces. Son patron ne peut pas tre composé de 5 faces alignées. Il n'existe que 2 types de patrons :

1. ceux ayant 2 faces alignées dans une direction et 4 faces alignées dans l'autre. On parlera d'un alignement 2×4.
2. ceux ayant 3 faces alignées dans une direction et 3 faces alignées dans l'autre. On parlera d'un alignement 3×3.

Dans la suite, on gardera les mêmes notations que dans le paragraphe précédent :

- L désignera la longueur maximale utilisée par le patron.
- ℓ désignera la largeur maximale utilisée par le patron.
- x désignera la hauteur de la boite. Les contraintes sur x dépendent de la forme du patron.

Patrons du type 3×3 Voici les différents patrons que l'on peut référencer, à symétries axiales près :



Patron n° 1 : étudié au paragraphe précédent.

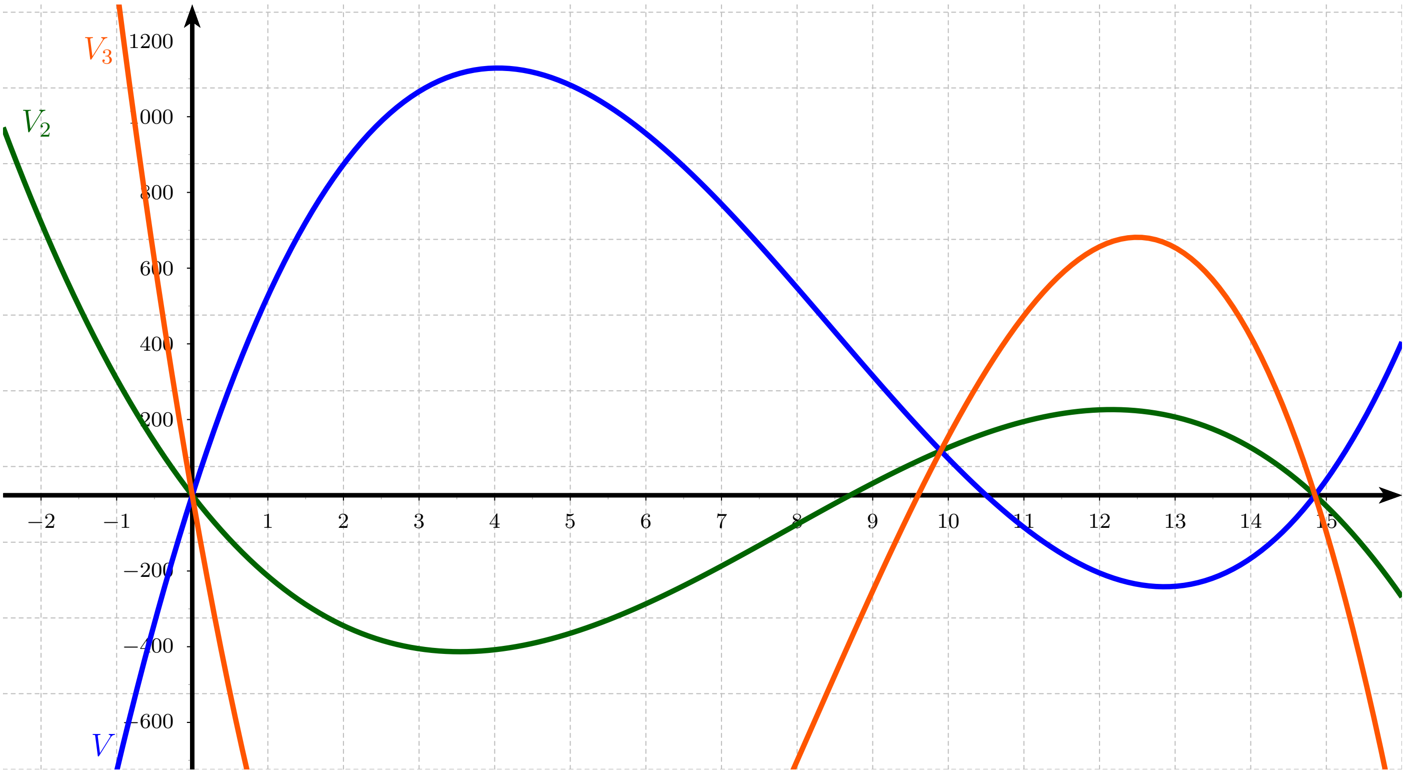
Patron n° 2 : la longueur de la boite s'exprime sous la forme $L - 2x$ et la largeur de la boite s'exprime sous la forme $\ell - x - (L - 2x) = \ell - L + x$. Les contraintes sur x sont :
Pour la longueur de la boite : $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$
Pour la largeur de la boite : $x \geq L - \ell$ et $L \leq 2\ell$
Dans le cas de notre feuille $A4$ cela revient à dire que $x \in [8{,}7; 14{,}85]$ (on a bien $29{,}7 \leq 2 \times 21$) et que

$$V_2(x) = (29{,}7 - 2x)(x - 8{,}7)x$$

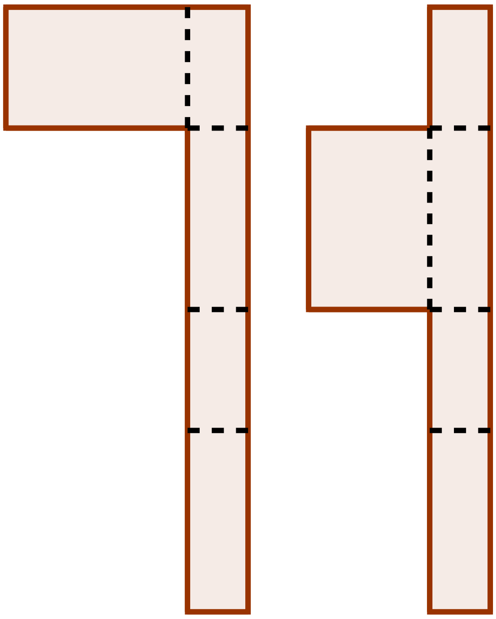
Patrons n° 3, 4 et 5 : la longueur de la boite s'exprime sous la forme $L - 2x$ et la largeur de la boite s'exprime sous la forme $\ell - 2(L - 2x) = \ell - 2L + 4x$. Les contraintes sur x sont :
Pour la longueur de la boite : $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$
Pour la largeur de la boite : $x \geq \frac{L}{2} - \frac{\ell}{4}$
Dans le cas de notre feuille $A4$ cela revient à dire que $x \in [9{,}6; 14{,}85]$ et que

$$V_3(x) = (29{,}7 - 2x)(4x - 38{,}4)x$$

Une étude des fonctions V_2 et V_3 permet de conclure que le maximum n'est pas atteint.



Patrons du type 2×4 Voici les différents patrons que l'on peut référencer, à symétries près :



Patron n° 1 : la longueur de la boite s'exprime sous la forme $\ell - x$ et la largeur de la boite s'exprime sous la forme $\frac{1}{2}(L - 2(\ell - x)) = \frac{L}{2} - \ell + x$. Les contraintes sur x sont :

Pour la longueur de la boite : $0 \leq x \leq \ell$

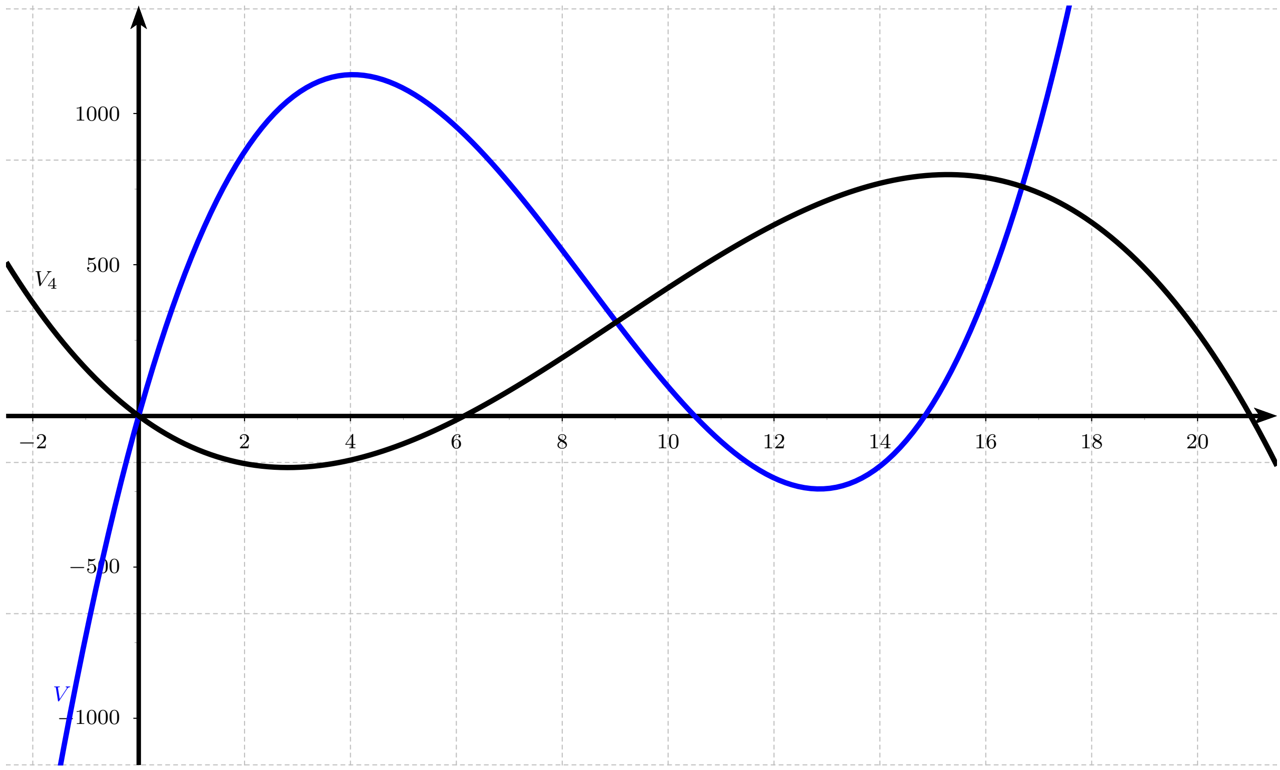
Pour la largeur de la boite : $x \geq \ell - \frac{L}{2}$

Dans le cas de notre feuille $A4$ cela revient à dire que $x \in [6{,}15; 21]$ et que

$$V_4(x) = (x - 6{,}15)(21 - x)x$$

Patrons n° 2 : la largeur de la boite s'exprime sous la forme $\ell - x$ et la longueur de la boite s'exprime sous la forme $\ell - 2(L - 2x) = \ell - 2L + 4x$. Ce cas est similaire au cas précédent.

Une étude de la fonction V_4 permet de conclure que le maximum n'est pas atteint.



1.2.3 Conclusion

Nous avons démontré que le volume maximal d'une boite parallélépipèdique sans couvercle était d'environ 1128,5 cm^3. Le patron associé est obtenu en coupant 4 carrés d'environ 4,05 cm de côté aux 4 coins de la feuille $A4$.

Remarque : Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait également démontrer que tous les patrons dont les bords ne sont pas parallèles aux côtés de la feuille ne sont pas optimales. Cela parait assez intuitif mais peut-être pas si simple à prouver rigoureusement

1.3 Prolongements possibles

Un prolongement possible est de poser le même problème en l'ouvrant aux autres solides (sans couvercle) connus, à savoir prismes droits, cylindres, pyramides, cônes ...voir même aux polyèdre en général ! Une variante dans cet esprit, restreinte aux solides connus du cycle 4, est proposée dans la situation « la boite à bonbons » disponible également dans le panier à problème.

Et si on disposait d'une feuille A4 pour créer un solide ouvert ayant le plus grand volume possible, quel serait sa forme ? ses dimensions ? son volume ?

2 Objets potentiellement travaillés/Connaissances en jeu

- forme(s) d'un patron d'un parallélépipède rectangle (sans couvercle)
- formule du volume d'un parallélépipède rectangle et de l'aire d'un rectangle
- dépendance d'une grandeur (le volume) en fonction d'une autre (la hauteur)
- production de formules et/ou de méthodes en utilisant le calcul littéral (expression algébrique d'une fonction)
- utilisation du tableur (tableau de valeurs d'une fonction)
- utilisation du grapheur (représentation graphique d'une fonction)*
- calculs de fonctions dérivées, étude du sens de variation et recherche d'extrema locaux
- résolution d'équations (second degré)

* *le point critique de cette fonction n'est pas un nombre décimal, les élèves ne le trouveront pas par essais « à la main » et n'auront qu'une valeur approchée avec le tableur. La représentation graphique leur permettra de conjecturer plus facilement le maximum recherché.*

3 Comptes rendus de mise en œuvre en classe

3.1 Énoncé et consignes

L'énoncé est le même que celui proposé au début du document. L'enseignant doit bien insister sur le fait que l'on cherche les dimensions du parallélépipède rectangle optimal et le volume associé. Les élèves sont libres de construire ou non un patron mais ce n'est pas obligatoire. Si on reformule l'énoncé par « contruire dans une feuille A4 un parallélépipède rectangle de plus grand volume possible »on risque d'inciter les élèves à construire le patron et à utiliser les mesures à partir de leur construction. Ils obtiendraient un résultat qui est erroné ou qui n'est pas optimal.

3.2 Scénario

Le scénario proposé est celui de mise en œuvre classique des SDRP (voir la page « Situations didactiques de recherche de problèmes / Mise en œuvre d'une SDRP » sur le site *http ://dreamaths.univ-lyon1.fr*).

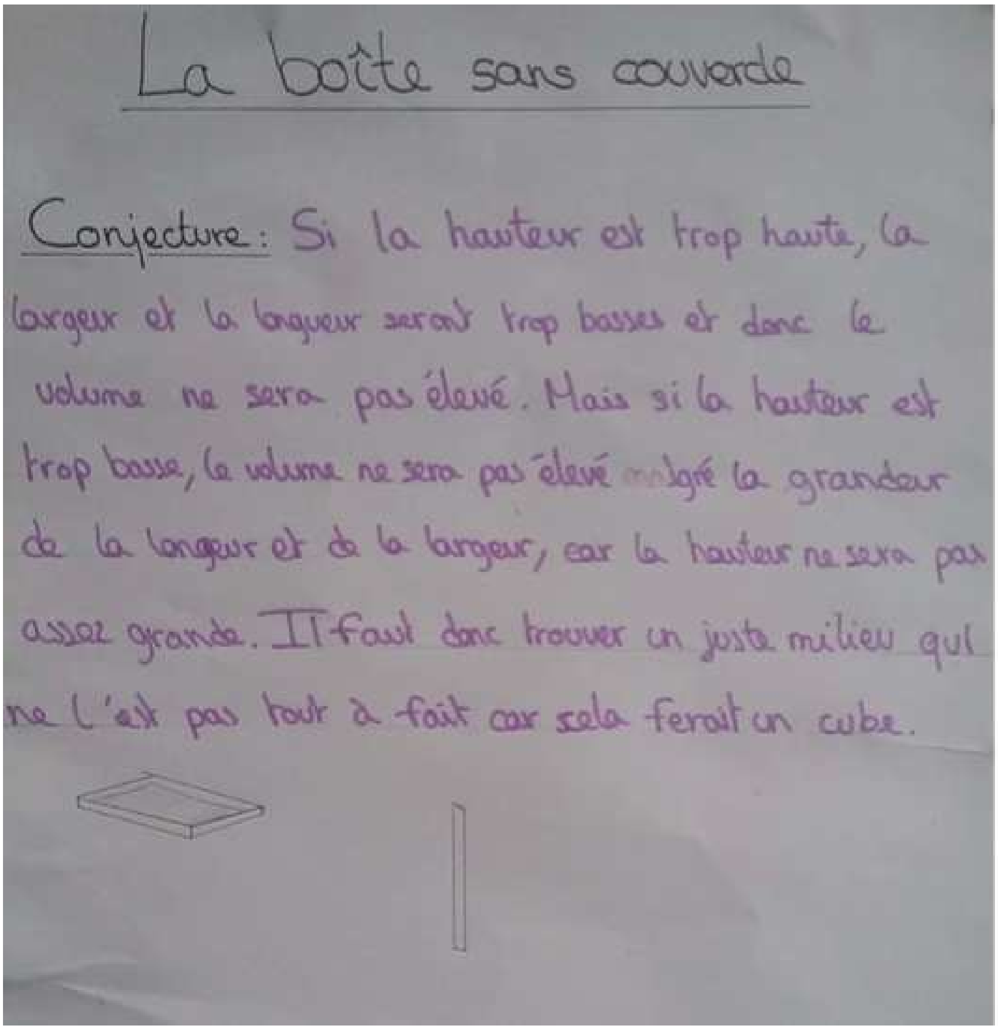
Les procédures risquent d'être moins variées (surtout en cycle 4) mais la solution optimal ne sera pas forcément atteinte et une mise en commun peut être organisée en présentant les résultats obtenus dans l'ordre croissant.

Pour permettre une meilleur appropriation du problème, il est possible de demander aux élèves (en devoir à faire à la maison pour la séance de recherche) de construire sur une feuille (de dimension quelconque), un patron d'une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle mais sans couvercle. En introduction du problème, l'enseignant peut récupérer et présenter à la classe plusieurs patrons construits ayant différentes dimensions et différentes formes et proposé l'énoncé (avec cette fois les bonnes contraintes).

3.3 Productions d'élèves

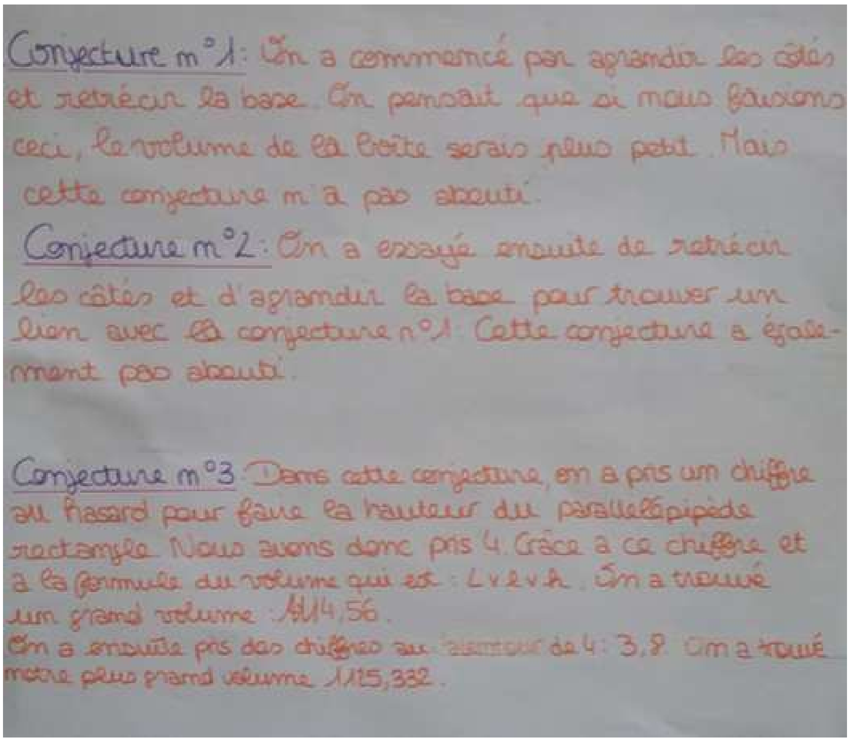
Dans les pages suivantes, vous trouverez quelques extraits d'affiches d'élèves de troisième qui permettent de mieux se rendre compte des conjectures et erreurs possibles des élèves.

Ce problème a été utilisé lors d'une séquence entière. Vous y trouverez un retour d'expérimentation détaillé dans l'onglet « Fonder son enseignement sur des problèmes / expérimentation de référence » ou sur la page « Fonder son enseignement sur des problèmes / d'autres expérimentations / sur le cycle 4 » sur le site *http ://dreamaths.univ-lyon1.fr*.



La boîte sans couvercle

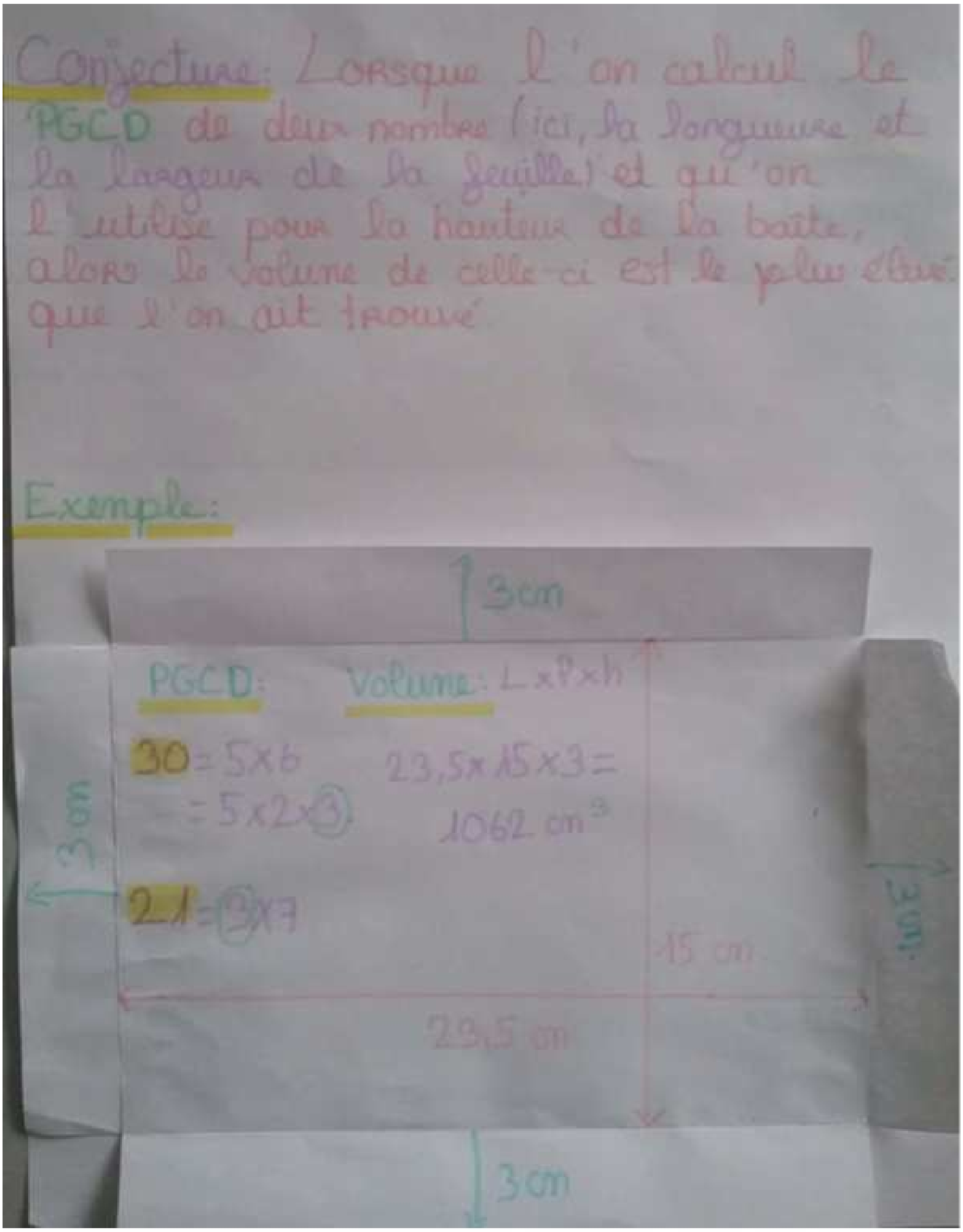
Conjecture : Si la hauteur est trop haute, la largeur et la longueur seront trop basses et donc le volume ne sera pas élevé. Mais si la hauteur est trop basse, le volume ne sera pas élevé malgré la grandeur de la longueur et de la largeur, car la hauteur ne sera pas assez grande. Il faut donc trouver un juste milieu qui ne l'est pas tout à fait car sela ferait un cube.

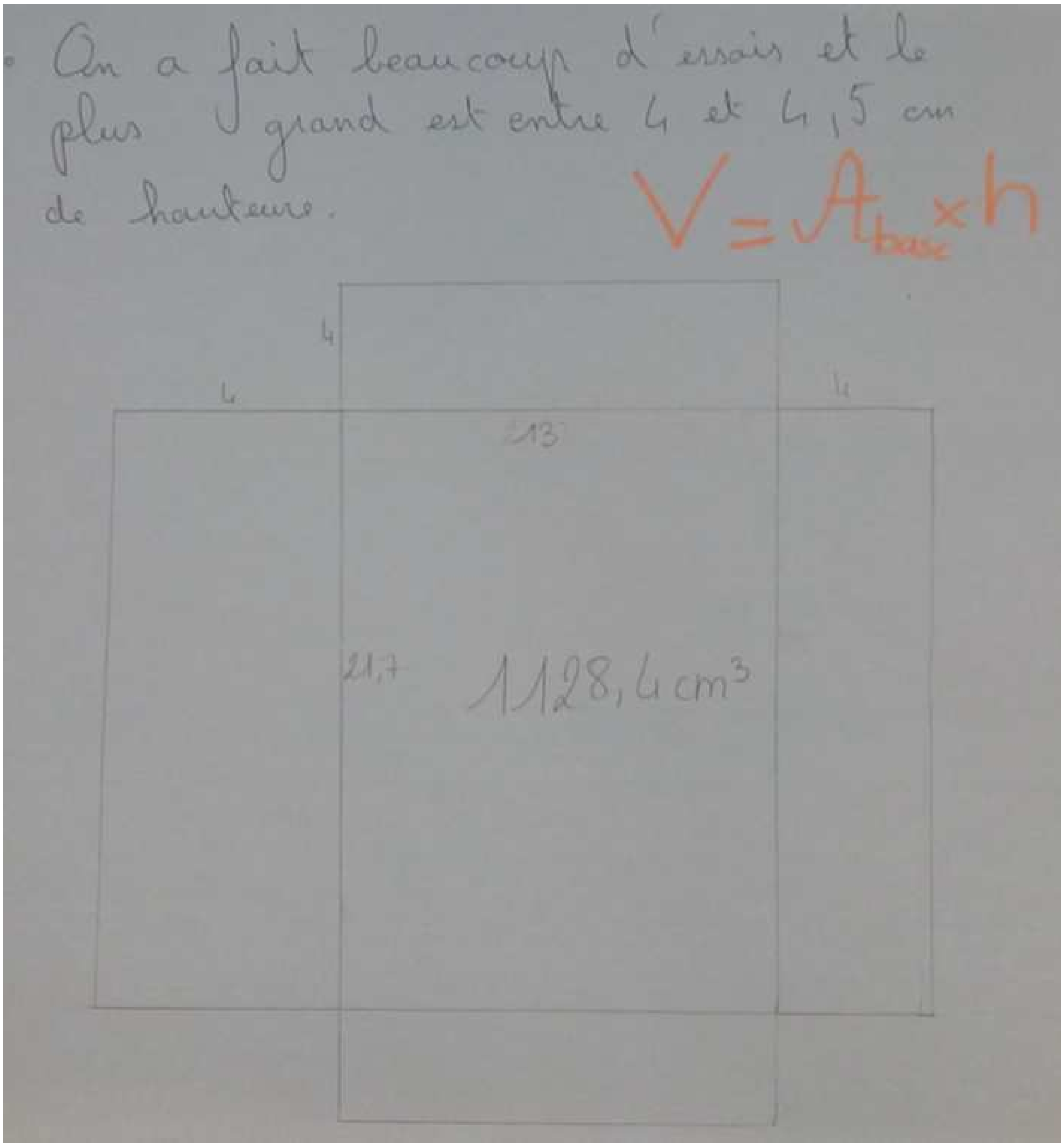


Conjecture n°1 : On a commencé par agrandir les côtés et rétrécir la base. On pensait que si nous faisions ceci, le volume de la boîte serais plus petit. Mais cette conjecture n'a pas abouti.

Conjecture n°2 : On a essayé ensuite de rétrécir les côtés et d'agrandir la base pour trouver un lien avec la conjecture n°1. Cette conjecture a également pas abouti.

Conjecture n°3 : Dans cette conjecture, on a pris un chiffre au hasard pour faire la hauteur du parallélépipède rectangle. Nous avons donc pris 4. Grâce à ce chiffre et à la formule du volume qui est : L × l × h. On a trouvé un grand volume : 1114,56.
On a ensuite pris des chiffres au alentour de 4 : 3,8. On a trouvé notre plus grand volume 1125,332.


Conjecture: Lorsque l'on calcul le PGCD de deux nombres (ici, la longueure et la largeur de la feuille) et qu'on l'utilise pour la hauteur de la boîte, alors le volume de celle-ci est le plus élevé que l'on ait trouvé.
Exemple:
3cm
PGCD:
Volume: L×l×h
30 = 5×6
= 5×2×3
23,5×15×3 =
1062 cm³
21 = 3×7
3cm
3cm
15 cm
23,5 cm
3cm



• On a fait beaucoup d'essais et le plus grand est entre 4 et 4,5 cm de hauteure.
V = A base × h
4
4
4
13
21,7
1128,4 cm³