Les triangles rectangles entiers

Equipe DREAM

8 juillet 2020

Table des matières

1 Le problème mathématique

1.1 L'énoncé

Version géométrique Quels sont les triangles rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre entier naturel ?

Version arithmétique Déterminer l'ensemble de triplets pythagoriciens , c'est-à-dire les triplets d'entier $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$

Remarque Le lien entre les deux versions est évidemment le théorème de Pythagore. Suivant le niveau de classe où vous souhaitez expérimenter ce problème et les objectifs que vous souhaitez atteindre, l'une des deux versions sera plus adaptée.

1.2 Des pistes de solution

Nous présentons ici une méthode de détermination des triplets pythagoriciens à l'aide d'outils arithmétiques relativement accessible à des élèves ayant suivi un enseignement d'arithmétique spéciale en terminale (ancienne terminale S spécialité maths). Voici les étapes de la preuve :

Restriction de la recherche : Etude des diviseurs communs à x,y et z pour une définition de triplets irréductibles. Puis étude de la parité des différents éléments de ce triplet (triplet irréductible rangé).

Recherche des triplets irréductibles rangés : On cherche une condition nécessaire et suffisante sur le triplet pour restreindre la recherche à déterminer un couple d'entiers (u,v) vérifiant certaines propriétés.

Dans toute la suite ; x,y et z désignerons des entiers naturels.

1.2.1 Restriction de la recherche

Triplet irréductible

Proposition 1 (x,y,z) *est un triplet pythagoricien si et seulement si pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $(nx,ny;nz)$ *est un triplet pythagoricien.*

Preuve : $x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow n^2(x^2 + y^2) = n^2z^2 \Leftrightarrow (nx)^2 + (ny)^2 = (nz)^2$ □

Proposition 2 *Si deux des trois nombres d'un triplet pythagoricien ont un diviseur commun* d*, alors* d *divise aussi le troisième nombre.*

Preuve : Soit d un diviseur commun à x et y, il existe x' et y' tels que $x = dx'$ et $y = dy'$. Ainsi $z^2 = d^2(x'^2 + y'^2)$ ie d^2 divise z^2 donc d divise z. Le raisonnement est similaire si d divise x et z ou si d divise y et z. □

En conséquence, si deux des trois nombres sont premiers entre eux, alors x,y et z sont premiers entre deux à deux.

On peut donc restreindre l'étude à un triplet (x,y,z) avec x, y et z premiers entre deux à deux (cela impose au passage que x, y et z soient non nuls). On dira que c'est un **triplet irréductible**.

Etude de la parité Soit (x,y,z) un triplet pythagoricien irréductible. Etudions les différentes possibilités de parité :

Les trois nombres sont pairs : c'est impossible car le triplet est supposé irréductible

Deux des trois nombres sont pairs : c'est impossible car le triplet est supposé irréductible (les deux nombres pairs ne seraient pas premiers entre eux).

Les trois nombres sont impairs : Comme le carré d'un nombre impair est impair et que la somme (ou différence) de deux nombres impairs est paire, le carré du troisième nombre est forcément pair donc le troisième nombre est aussi pair. C'est donc impossible d'obtenir trois nombres impairs.

Il ne reste qu'une seule possibilité : deux des nombres sont impairs et l'un est pair. Encore une fois, trois cas sont possibles :

x et y sont impairs et z est pair : il existe x' et y' tels que $x = 2x' + 1$ et $y = 2y' + 1$. Dans ce cas, $z^2 = 4(x'^2 + x' + y'^2 + y') + 2$ mais comme z est pair, z^2 est divisible par 4, ce qui contredit l'égalité précédente. C'est configuration est donc impossible.

x et z sont impairs et y est pair : Pas de contradiction.

y et z sont impairs et z est pair : Pas de contradiction.

On peut donc restreindre l'étude à un triplet irréductibe (x,y,z) avec x et z impairs et y pair. On dira que c'est un **triplet irréductible rangé**.

1.2.2 Recherche des triplets irréductibles rangés

Soit (x,y,z) triplet irréductible rangé.

Supposons que (x,y,z) soit un triplet pythagoricien rangé. On peut écrire $y = 2y'$ et $4y'^2 = z^2 - x^2 = (z-x)(z+x)$ c'est à dire

$$y'^2 = \frac{z-x}{2}\frac{z+x}{2}$$

avec $\frac{z-x}{2}$ et $\frac{z+x}{2}$ des entiers naturels non nuls (par hypothèses sur la parité et le fait que $y'^2 > 0$).

- $\frac{z-x}{2}$ et $\frac{z+x}{2}$ sont premiers entre eux : par l'absurde, supposons qu'il existe un nombre $d > 1$ qui les divise tous les deux. Alors d divise la somme qui est égale à z et la différence qui est égale à $\pm x$. Or x et z sont supposés premiers entre eux, d'où l'absurdité.
- $\frac{z-x}{2}$ et $\frac{z+x}{2}$ sont des carrés parfaits : comme $y'^2 = \frac{z-x}{2}\frac{z+x}{2}$ et que les deux facteurs sont premiers entre eux, la décomposition en produit de nombres premiers nous montre qu'il n'ont pas de facteurs premiers commun et que chaque exposant est pair. Donc $\frac{z-x}{2}$ et $\frac{z+x}{2}$ sont des carrés parfaits, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers non nuls u et v tels que $\frac{z+x}{2} = u^2$ et $\frac{z-x}{2} = v^2$ avec, dans ce cas $u > v$.

Finalement :

- $y = 2uv$ car $y' = uv$
- $z = \frac{z+x}{2} + \frac{z-x}{2} = u^2 + v^2$
- $x = \frac{z+x}{2} - \frac{z-x}{2} = u^2 - v^2$

De plus :

- u et v sont de parités différentes. En effet, si u et v étaient tous les deux pairs, x, y et z seraient aussi pairs, ce qui est impossible. De même, si u et v sont tous les deux impairs, alors y serait impair, ce qui n'est pas possible.

- u et v sont premiers entre eux. En effet, si u et v ont un diviseur commun $d > 1$, alors $d^2 > 1$ est un diviseur commun à x, y et z, ce qui n'est pas possible.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux entiers $u > v$ de parités différentes et premiers entre eux tels que

$$x = u^2 - v^2; \quad y = 2uv; \quad z = u^2 + v^2$$

Alors :

- (x,y,z) est un triplet pythagoricien : $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = z^2$
- (x,y,z) est un triplet rangé : comme u et v sont de parité différentes, leurs carrés gardent la même parité et la différence et la somme sont forcément impairs, donc x et z sont impairs. De plus, y est bien un nombre pair, par construction.
- (x,y,z) est un triplet irréductible : si x et z ont un diviseur premier commun $d \geq 3$ (x et z sont impairs) alors d diviserait $x + z = 2u^2$ et $z - x = 2v^2$. D'après le lemme de Gauss, d ne divise pas 2 implique que d divise u^2 (donc u) et v^2 (donc v) ce qui est impossible puisque u et v sont premiers entre eux. Conclusion : x et z sont premiers entre eux et la propriété n° 2 implique x, y et z sont deux à deux premiers entre eux (car (x,y,z) est un triplet pythagoricien).

On obtient donc le théorème suivant qui permet d'obtenir tous les triplets pythagoriciens :

Théorème 1 *Soit* $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$.
(x,y,z) *est un triplet pythagoricien irréductible rangé si et seulement si il existe deux nombres entiers* u *et* v $(u > v)$, *de parité différentes et premiers entre eux, tels que*

$$x = u^2 - v^2; \quad y = 2uv; \quad z = u^2 + v^2$$

On obtient ainsi les premiers triplets pythagoriciens irréductibles rangés :

u	v	x	y	z
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25

1.2.3 Triangles rectangles isocèles

Il est fréquent que les élèves cherchent des triangles rectangles entiers parmi ceux qui sont isocèles. Il n'existe pas de triangle rectangle entier isocèle et cela provient de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Proposition 3 *Le nombre* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Preuve : Supposons qu'il existe deux nombres entiers premiers entre eux p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Cela signifie que $p^2 = 2q^2$, en particulier que p^2 et p sont pairs. Ainsi, il existe p' tel que $p = 2p'$. Dans ce cas, $q^2 = 2p'^2$ ce qui implique que q^2 et q sont pairs, ce qui est absurde car p et q sont premiers entre eux. $\square$

Le triplet $(1,1,\sqrt{2})$ ne pourra jamais être multiplié par un nombre entier pour obtenir un triplet d'entiers (pythagoriciens).

2 Objets potentiellement travaillés/Connaissances en jeu

- Le théorème de Pythagore (comme caractérisation d'un triangle rectangle ou pour calculer une longueur manquante dans un triangle rectangle)
- Conservation des angles et proportionnalité des longueurs dans un agrandissement/réduction, triangles semblables
- Arithmétique : nombres premiers entre eux, parité, divisibilité etc.
- Calcul numérique : irrationalité de $\sqrt{2}$; carrés parfaits ; racine carrée d'un nombre positif
- Algorithmique : création d'un programme avec boucles et conditions d'arrêts qui génère des triplets irréductibles

3 Comptes rendus de mise en œuvre en classe

3.1 Énoncé et consignes

L'énoncé donné au collège est la version géométrique du problème. Il y a donc une part de modélisation arithmétique à faire par les élèves.

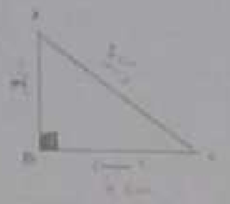
3.2 Scénario

Le scénario proposé est celui de mise enœuvre classique des SDRP (voir la page « Situations didactiques de recherche de problèmes / Mise en œuvre d'une SDRP » sur le site *http ://dreamaths.univ-lyon1.fr*). Une précision est apportée durant le temps de présentation des enjeux de la séance afin d'encourager les élèves à prouver ce qu'ils affirment.

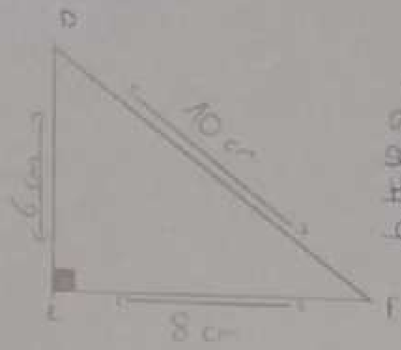
3.3 Productions d'élèves

Dans les pages suivantes, vous trouverez quelques extraits d'affiches d'élèves de troisième qui permettent de mieux se rendre compte des conjectures et erreurs possibles des élèves.

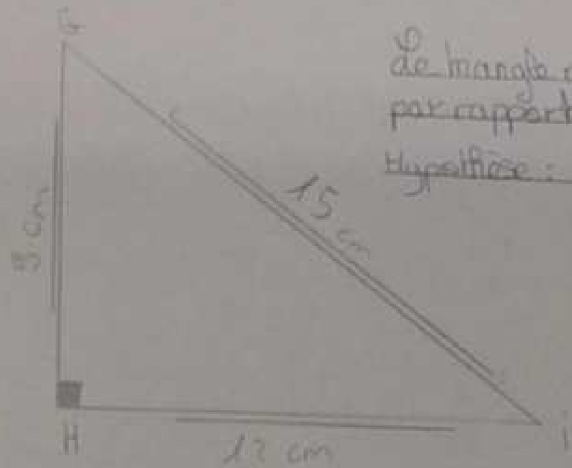
Ce problème a été utilisé lors d'une séquence entière. Vous y trouverez un retour d'expérimentation détaillé dans l'onglet « Fonder son enseignement sur des problèmes / expérimentation de référence » ou sur la page « Fonder son enseignement sur des problèmes / d'autres expérimentations / sur le cycle 4 » sur le site *http ://dreamaths.univ-lyon1.fr*.



Le triangle rectangle $A\hat{B}C$ de longueur :
AB = 3 cm , BC = 4 cm ; CA = 5 cm
C'est un triangle rectangle avec des longueurs de nombres entiers.

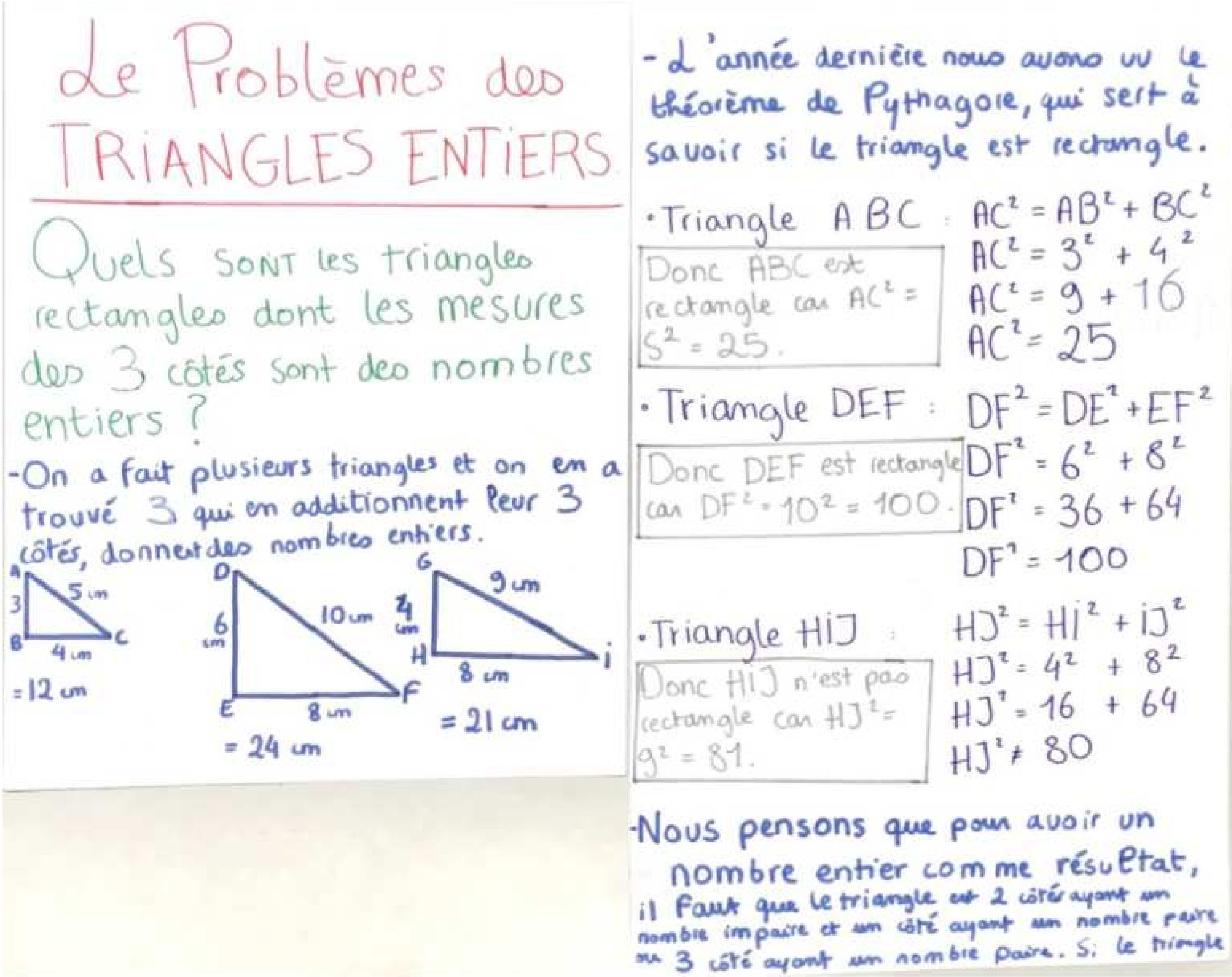


Le triangle rectangle $D\hat{E}F$ a des longueurs, ses longueurs sont le double du triangle ABC.
Hypothèse : AB×2 = DE, BC×2 = EF,
CA×2 = FD



Le triangle rectangle $G\hat{H}I$ est multiplié par 3 par rapport au premier exemple
Hypothèse : AB×3 = GH , BC×3 = HI , CA×3 = IG

Conclusion : Oui, l'existe des triangles rectangles dont la longueur de chaque côter est un nombre entier. Quand on a un triangle rectangle avec des longueurs qui sont composé de nombre entier alors leur multiple auront egalement des nombre entier



Le Problèmes des TRIANGLES ENTIERS

Quels SONT les triangles rectangles dont les mesures des 3 côtés sont des nombres entiers ?

-On a fait plusieurs triangles et on en a trouvé 3 qui en additionnent leur 3 côtés, donnent des nombres entiers.

A, B, C : 3, 5 cm, 4 cm, = 12 cm

D, E, F : 6 cm, 10 cm, 8 cm, = 24 cm

G, H, i : 4 cm, 9 cm, 8 cm, = 21 cm

- L'année dernière nous avons vu le théorème de Pythagore, qui sert à savoir si le triangle est rectangle.

• Triangle ABC : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 3^2 + 4^2$

$AC^2 = 9 + 16$

$AC^2 = 25$

Donc ABC est rectangle car $AC^2 = 5^2 = 25$.

• Triangle DEF : $DF^2 = DE^2 + EF^2$

$DF^2 = 6^2 + 8^2$

$DF^2 = 36 + 64$

$DF^2 = 100$

Donc DEF est rectangle car $DF^2 = 10^2 = 100$.

• Triangle HIJ : $HJ^2 = HI^2 + IJ^2$

$HJ^2 = 4^2 + 8^2$

$HJ^2 = 16 + 64$

$HJ^2 \neq 80$

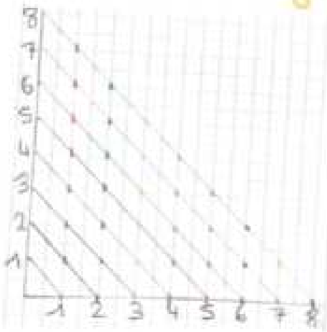
Donc HIJ n'est pas rectangle car $HJ^2 = 9^2 = 81$.

-Nous pensons que pour avoir un nombre entier comme résultat, il faut que le triangle ait 2 côtés ayant un nombre impaire et un côté ayant un nombre paire ou 3 côté ayant un nombre paire. Si le triangle

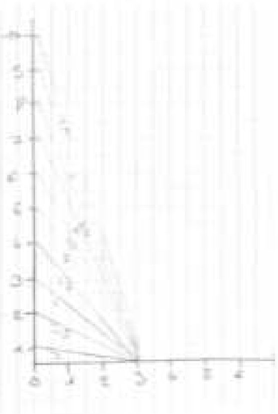
Le Problème des triangles rectangles entiers

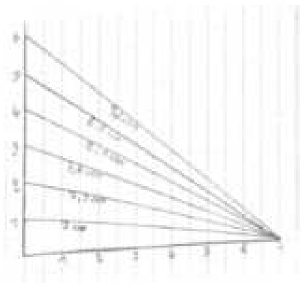
quels sont les triangles rectangles dont les mesures des 3 cotés sont des nombres entiers ?

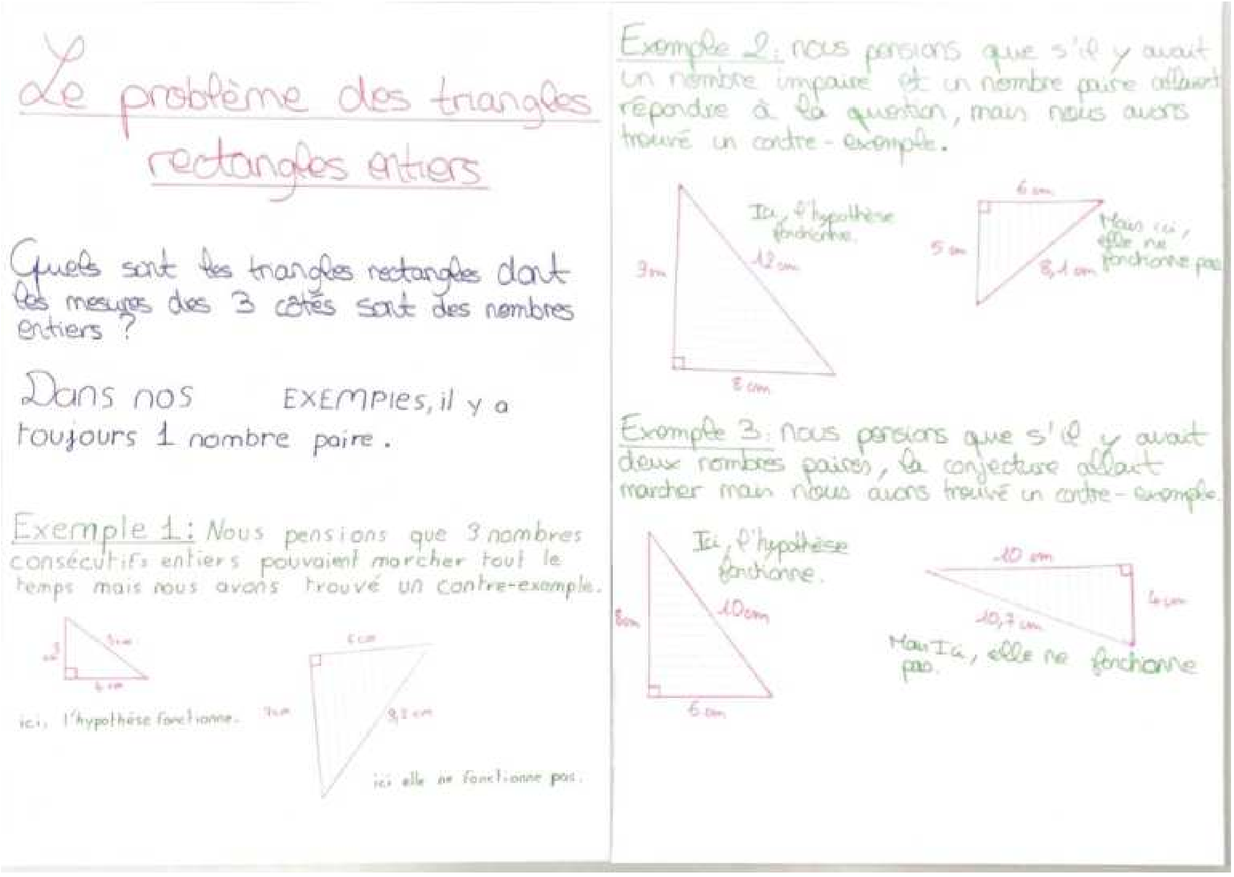
-Pour les triangles où les 2 cotés sont égaux:



-La diagonale de 2 petits carreaux = 1,4 cm et chaque fois le nombre de carreaux sur 1 côté est multiplié par 1,4
Ici tout les 5 cm de côté la mesure de l'hypoténuse est entière (5, 10, 15...)






Le problème des triangles rectangles entiers
Quels sont les triangles rectangles dont les mesures des 3 côtés sont des nombres entiers ?
Dans nos EXEMPles, il y a toujours 1 nombre paire.
Exemple 1 : Nous pensions que 3 nombres consécutifs entiers pouvaient marcher tout le temps mais nous avons trouvé un contre-exemple.
ici, l'hypothèse fonctionne.
ici elle ne fonctionne pas.
Exemple 2 : nous pensions que s'il y avait un nombre impaire et un nombre paire allaient répondre à la question, mais nous avons trouvé un contre-exemple.
Ici, l'hypothèse fonctionne.
3 cm
12 cm
8 cm
6 cm
5 cm
8,1 cm
Mais ici, elle ne fonctionne pas
Exemple 3 : nous pensions que s'il y avait deux nombres paires, la conjecture allait marcher mais nous avons trouvé un contre-exemple.
Ici, l'hypothèse fonctionne.
8 cm
10 cm
6 cm
10 cm
4 cm
10,7 cm
Mais Ici, elle ne fonctionne pas.