

Problème :

Les triangles rectangles entiers

Durée théorique : 9 heures

Connaissances et compétences attendues :

Comprendre l'effet et de quelques transformations sur des grandeurs géométriques	
Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs ou les angles. ⁽¹⁾	Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquettes) pour calculer des longueurs, des aires, des volumes. Utiliser l'échelle d'une carte
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture. • Théorème de Pythagore et réciproque.	Mobiliser les connaissances des figures, des configurations et des transformations au programme pour déterminer des grandeurs géométriques. Mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant les propriétés des figures, des configurations et des transformations ⁽²⁾
Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	
• Définition de la racine carrée • Les carrés parfaits entre 1 et 144.	
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	
• Multiples et diviseurs ⁽³⁾	

Commentaires :

- (1) Les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sont au coeur du problème. Ceux des déplacements devront être vus lors d'une autre séquence.
- (2) Il n'y aura pas de lien avec le théorème de Thales ou les homothéties (vues dans d'autres séquences) mais il est possible de l'envisager à ce moment.
- (3) On parlera de nombres premiers entre eux comme nombres ayant 1 pour seul diviseur commun (sans parler de PGCD)

Compétences mathématiques principalement mobilisées :

Chercher	<ul style="list-style-type: none"> • S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture. • Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. • Décomposer un problème en sous-problèmes.
Modéliser	<ul style="list-style-type: none"> • Reconnaître un modèle mathématique (proportionnalité, équiprobabilité) et raisonner dans le cadre de ce modèle pour résoudre un problème.
Représenter	<ul style="list-style-type: none"> • Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique.
Raisonner	<ul style="list-style-type: none"> • Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui. • Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion. • Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.
Communiquer	<ul style="list-style-type: none"> • Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange. • Vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif

Contenu :

- I. Analyse de la situation
- II. Mise en oeuvre de la situation
- III. Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème
- IV. Ressources sur le théorème de Pythagore
- V. Ressources sur les agrandissements et les réductions

Thème : Analyse de la situation

Énoncé du problème

Existe-t-il des triangles rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre entier naturel ?

Solution mathématique

Voir le document « TrianglesRectanglesEntiers.pdf » sur le site DREAMaths (https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/1324/34805) dans la section « Autres travaux -> panier à problèmes »

Les mathématiques en jeux

- Le théorème de Pythagore comme caractérisation d'un triangle rectangle
- Le théorème de Pythagore pour calculer une longueur manquante dans un triangle rectangle
- Conservation des angles et proportionnalité des longueurs dans un agrandissement/réduction, triangles semblables
- Arithmétique: nombres premiers entre eux, parité, divisibilité
- Calcul numérique : irrationalité de $\sqrt{2}$, carrés parfaits et racine carré d'un nombre positif

Analyse des connaissances, méthodes et procédures possibles

- Essais à la main pour trouver des triangles rectangles (ils vont commencer à construire des triangles dont les deux côtés adjacents à l'angle droit vont être entiers mais où l'hypoténuse ne le sera pas).
- Utilisation du théorème de Pythagore comme caractérisation du triangle rectangle (passage du registre géométrique au registre algébrique)
- Utilisation du théorème de Pythagore pour calculer une longueur manquante dans le triangle rectangle
- Utilisation du théorème de Thalès pour agrandir le triangle rectangle
- Recherche de conditions sur les entiers qui représentent les longueurs

Doc 2 -

Thème : Mise en œuvre de la situation

➔ 1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 10-15 min)**Temps de présentation des enjeux de la séance**

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves.

Rechercher, émettre des conjectures, faire des essais (dessins), prendre des initiatives... Une place importante est accordée ici à la **preuve des conjectures émises**.

Temps de familiarisation avec problème

Présentation du problème, lecture et relecture collective de l'énoncé, explication du vocabulaire.

Temps de recherche individuelle (au moins 5 min)

Appropriation du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

➔ 2ème phase : recherche en groupe (entre 30 min et 1 heure)

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourage à formuler des conjectures, trouver des éléments de preuve, apporter des justifications etc.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

➔ 3ème phase : mise en commun et débat (au moins 30 min)

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

➔ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 10 min)

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les points techniques évoqués par les élèves
- les raisonnements et méthodes utilisés
- les savoirs mathématiques utilisés

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. **A écrire en rouge dans le cahier d'exercice.**

Il faut compter au moins 2 heures pour une mise oeuvre complète

Remarque : La résolution complète du problème (avec démonstration) est compliquée pour des élèves de troisième. On peut néanmoins démontrer certaines conjectures partielles qui permettront d'avancer dans la recherche...

Doc 3 -

Thème : Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

Ce qui peut apparaître dans le bilan de la recherche

- Utilisation du théorème de Pythagore comme critère de validation des triangles rectangles
- Utilisation de l'agrandissement pour trouver une infinité d'autres triangles rectangles entiers à partir d'un seul
- Pas possible de trouver un triangle rectangle isocèle entier.
- ...

Proposition de prolongements, appelés « études » pour travailler le programme à partir de ce bilan.

Etude 1 - Comment valider le fait un triangle rectangle entier ? Comment en trouver d'autres ?

Retour sur le théorème de Pythagore. En général le triangle (3;4;5) est proposé lors du bilan ainsi que certains de ces agrandissements. Mettre en évidence ce lien via la définition d'un agrandissement et d'une réduction.

Institutionnaliser le théorème de Pythagore et la définition d'un agrandissement/réduction

Etude 2 - Y a-t-il différentes formes de triangles rectangles entiers ?

Recherche d'exemples qui ne soient pas issus du (3;4;5) ; introduction des triangles rectangles primitifs (mesures premières entre elles) ; retour sur le cas du triangle rectangle isocèle et sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Institutionnaliser la racine carrée d'un nombre positif, la notion de carré parfait, et quelques bases d'arithmétiques si besoin

Etude 3 - Entraînement : Utilisation du théorème de Pythagore en géométrie plane.

Exercices d'applications ou problèmes de brevet

Remarque : Cette proposition de plan est générique et ne doit contraindre l'enseignant. En fonction des résultats de la classe, plusieurs structures de séquence et plusieurs approfondissements seront envisageables.

Plan envisagé en 2018-2019

Etude 1 - conjecture n°1 : les agrandissements

Etude 2 - conjectures n°2&3 : les triangles rectangles isocèles

Etude 3 - Utilisation du théorème de Pythagore en géométrie plane

Etude 4 - Etude des nombres entiers d'un triangle rectangle entier

Doc 4 -

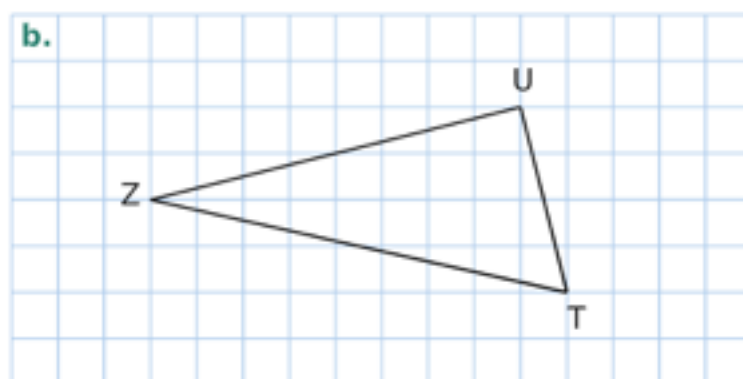
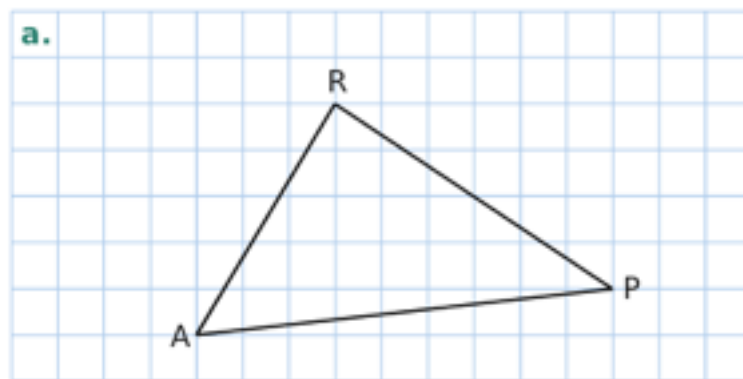
Thème : Ressources sur le théorème de Pythagore

Problèmes donnés dans un cadre mathématique

Exercices utilisant directement le théorème

Exercices issus du manuel iParcours 4ème, pages 101 à 107 disponibles à l'adresse : <http://www.iparcours.fr/ouvrages/ouvrages.php?ouvrage=Manuel42016>

Défi (ex 69 p 107)



Les triangles RAP et ZUT sont-ils rectangles ?
Si oui, précise en quel point et justifie ta réponse.

Reconnaitre des triangles semblables

Donner une liste de triangles, sous forme de schéma, puis demander :

- 1) de déterminer ceux qui sont rectangles
- 2) de les regrouper par familles de triangles semblables

Problèmes contextualisés

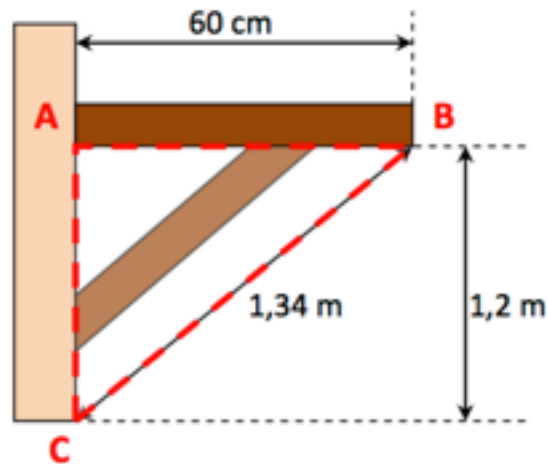
Sens direct du théorème de Pythagore

Exercices issus du manuel iParcours 4ème, pages 101 à 107 disponibles à l'adresse : <http://www.iparcours.fr/ouvrages/ouvrages.php?ouvrage=Manuel42016>

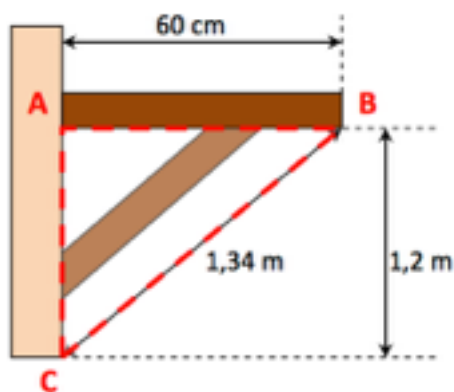
Ex 28 p 101 ; Ex 36 p 101 ; Ex 63 p 106 ; Ex 66 p 106

Réciproque du théorème de Pythagore

L'étagère est-elle perpendiculaire au mur ?

*Correction*

L'étagère est-elle perpendiculaire au mur ?



Il faut commencer par trouver le triangle dans lequel se placer : les trois longueurs données nous aident. Notons-le ABC.

Il s'agit de tester l'égalité de Pythagore : $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

D'une part, $BC^2 = 1,34^2 = 1,7956$.

D'autre part, $BA^2 + AC^2 = 0,6^2 + 1,2^2 = 0,36 + 1,44 = 1,8$
(attention, il faut convertir 60 cm en m pour avoir la même unité partout !).

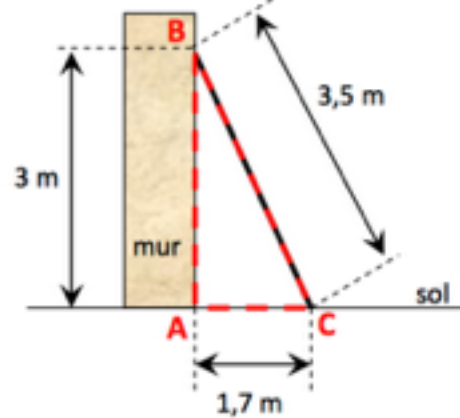
On constate que l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc d'après le théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en A. Finalement, l'étagère n'est pas perpendiculaire au mur.

Paul place une échelle de 3,50 m contre un mur. Sa hauteur sur le mur est de 3 m, et l'échelle est éloignée du mur sur le sol de 1,7 m. Le mur est-il perpendiculaire au sol ?

Correction

Bols place une échelle de 3,50 m contre un mur. Sa hauteur sur le mur est de 3 m, et l'échelle est éloignée du mur sur le sol de 1,7 m. Le mur est-il perpendiculaire au sol ?

Il faut commencer par faire une figure illustrant la situation :



Il s'agit de tester l'égalité de Pythagore : $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

D'une part, $BC^2 = 3,5^2 = 12,25$.

D'autre part, $BA^2 + AC^2 = 3^2 + 1,7^2 = 9 + 2,89 = 11,89$.

On constate que l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc d'après le théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en A. Finalement, le mur n'est pas perpendiculaire au sol.

Thème : Ressources sur l'agrandissement/réduction

Reconnaitre des situations d'agrandissement et de réduction

Diaporamas sous forme de questions flash sur les thèmes suivants

- 1) Reconnaitre des triangles proportionnels à l'aide des mesures ou du codage
- 2) Reconnaitre des rectangles agrandis à l'aide du quadrillage
- 3) Reconnaitre des rectangles réduits à l'aide du quadrillage