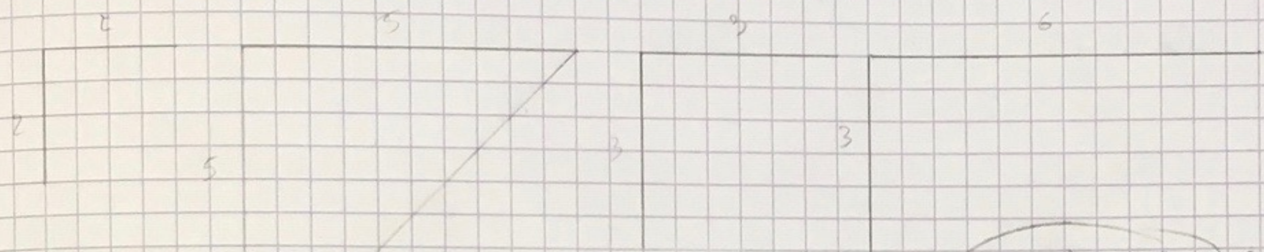
Extrait cahier d'élève

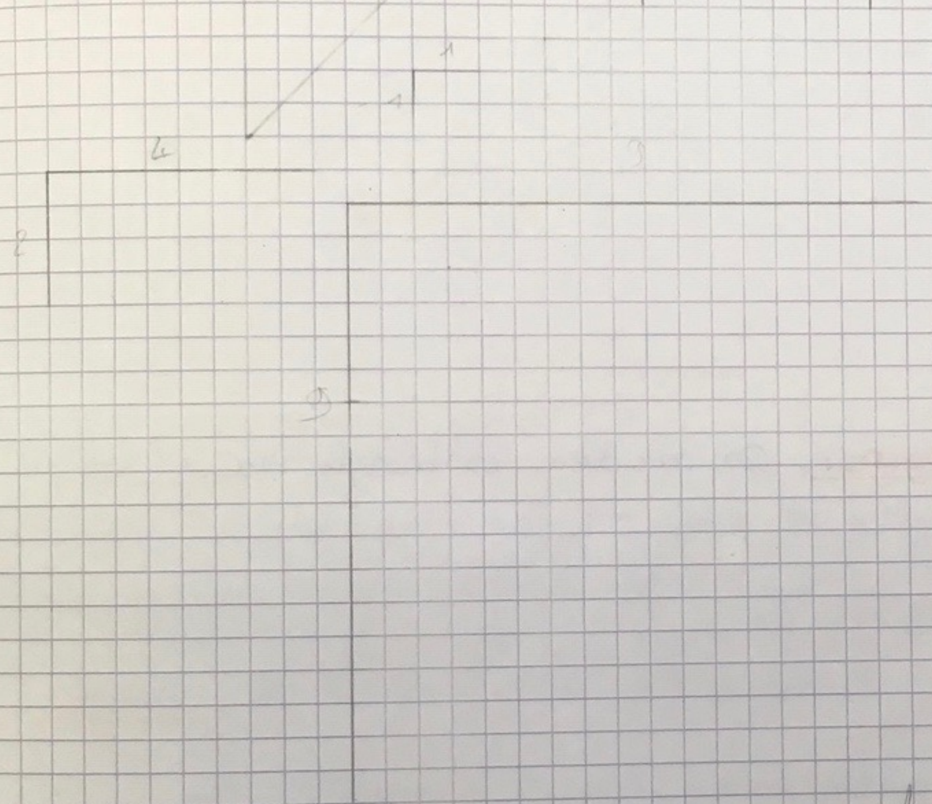
3eme2

Collège Emile Zola, Belleville, 2018-2019

Le problème des triangles rectangles entiers

<u>Énoncé :</u> Quels sont les triangles rectangles dont les mesures des 3 côtés sont des nombres entiers ?





3 - 4 - <u>5</u> 2 n.ip. hyp.

7 - 7 - <u>10</u> 2 n.ip.

8 - 9 - <u>12</u> 1 n.ip.

12 - 12 - <u>17</u> 1 n.ip

9 - 12 - <u>14</u> 1

8 - 14 - <u>16</u> 0

20 - 48 - <u>52</u>

8 - 15 - <u>17</u> 2

5 - 12 - <u>13</u>

6 - 8 - <u>10</u>

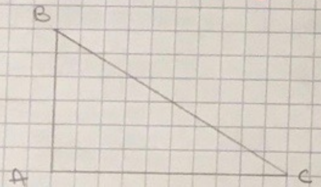
10 - 11 - <u>15</u>

1 chiffre pair à chaque fois

Bilan de la recherche (3è2) :

- → La mesure ne permet pas d'affirmer qu'un triangle est rectangle entier (c'est-à-dire que c'est un triangle rectangle dont la mesure de chaque côté est un nombre entier). Elle peut être utile pour chercher un contre-exemple.
- → Le théorème de Pythagore permet de valider de manière certaine qu'un triangle est rectangle ou non.
- → Les triangles rectangles entiers qui ont été validés : (3 ; 4 ; 5) , (6; 8 ; 10)
- → <u>Conjectures/pistes à explorer pour trouver des triangles rectangles entiers</u>
  1. Quand on a trouvé un triangle rectangle entier, il suffit de choisir un multiple à chaque longueur pour en obtenir d'autres
  2. Quand on a un triangle rectangle isocèle, l'hypoténuse est un multiple de 1,4. Donc (5,5,7) , (10, 10, 14) etc. sont des triangles rectangles entiers
  3. Les triangles rectangles isocèle dont l'un des côté de l'angle droit mesure 1 sont des triangles rectangles entiers (ex : (1, 7, 7))
  4. C'est impossible d'avoir un triangle rectangle entier avec deux nombres pairs et un nombre impair. Par contre, on peut avoir deux nombre impairs et un nombre pair, ou trois nombres pairs

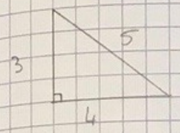
<u>Théorème de Pythagore :</u> On considère un triangle ABC.



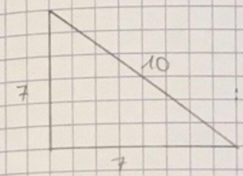
sens direct (• Si le triangle ABC est rectangle en A, alors : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

réciproque (• Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors, le triangle ABC est rectangle en A.

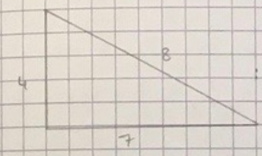
<u>Application :</u> Les triangles suivants sont-ils rectangles ?



• $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
• $5^2 = 25$
} D'après le théorème de Pythagore, le triangle est rectangle.



• $7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98$
• $10^2 = 100$ / $98 \neq 100$
} D'après le théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.



• $4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$
• $8^2 = 64$ / $64 \neq 65$
} D'après le théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

I - Conjecture n°1 : Les agrandissements.

• <u>Conjecture :</u> Si on multiplie les longueurs d'un triangle rectangle entier par un nombre entier, alors le triangle obtenu est encore un triangle rectangle entier.

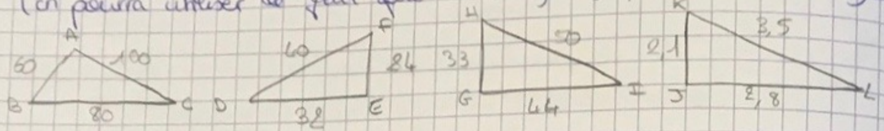
• <u>Essais :</u> Le triangle (3 ; 4 ; 5) est rectangle

<u>×2 :</u> J'obtiens (6 ; 8 ; 10) : triangle rectangle car $6^2 + 8^2 = 10^2$.
<u>×7 :</u> J'obtiens (21 ; 28 ; 35) : triangle rectangle car $21^2 + 28^2 = 35^2$.
<u>×13 :</u> J'obtiens (39 ; 52 ; 65) : triangle rectangle car $39^2 + 52^2 = 65^2$.

Les 3 triangles obtenus ont leurs côtés proportionnels au triangle (3 ; 4 ; 5).
On dit que ce sont des <u>triangles semblables</u>.
Ce sont des agrandissements du triangle (3 ; 4 ; 5).
⇒ On ne change pas les angles !
donc on garde l'angle droit.

<u>CONJECTURE VRAI</u>

ex : sans utiliser le théorème de Pythagore, rechercher tous les triangles rectangles (on pourra utiliser le fait que le triangle $(3 ; 4 ; 5)$ est rectangle).



ABC est rectangle $(3 \times 20 = 60 ; 4 \times 20 = 80 ; 5 \times 20 = 100)$.
EDF est rectangle $(3 \times 8 = 24 ; 4 \times 8 = 32 ; 5 \times 8 = 40)$.
GHI n'est pas rectangle $(3 \times 11 = 33 ; 4 \times 11 = 44 ; 5 \times 10 = 50)$.
JKL

ABC : le triangle ABC est obtenu en multipliant par 20 les longueurs du $(3 ; 4 ; 5)$. Il est semblable au triangle rectangle $(3 ; 4 ; 5)$ alors il est rectangle.

DEF : le triangle DEF est obtenu en multipliant par 8 les longueurs du $(3 ; 4 ; 5)$. Il est semblable au triangle rectangle $(3 ; 4 ; 5)$ alors il est rectangle.

GHI : $33 = 3 \times 11$; $44 = 4 \times 11$ mais $50 = 5 \times 10$.
Le triangle GHI n'est pas semblable au triangle $(3 ; 4 ; 5)$ donc on ne peut pas affirmer qu'il est rectangle.

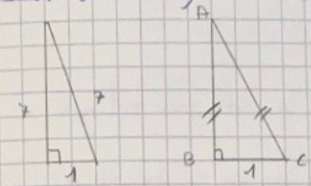
JKL : le triangle est semblable au $(3 ; 4 ; 5)$ (on multiplie par 7 et on divise par 10 chaque longueur). Il est rectangle. $\times 0,7$

Conclusion : il existe une infinité de triangles rectangles entiers.

II - Conjectures n° 2 et 3 : triangles rectangles isocèles :

Conjecture n° 3 : Les triangles rectangles isocèles dont l'un des côtés mesure 1 sont des triangles entiers.

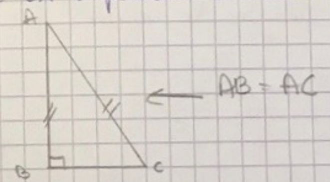
ex :



contre-exemple :

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 + BC^2 = 7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50 \\ AC^2 = 7^2 = 49 \end{array}\right\}$$ $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$ D'après le théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

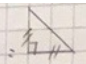
C'est impossible d'obtenir un triangle rectangle isocèle de ce type :



D'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 + BC^2 = AC^2$

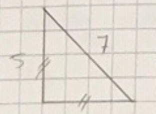
Or $AB^2 = AC^2$ (car $AB = AC$) et $BC^2 = 1^2 = 1$
L'équation $AB^2 + 1 = AB^2$ n'a pas de solution.

Conséquence : Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est toujours supérieur à chacun des deux autres côtés.

On étudie les triangles de ce type : 

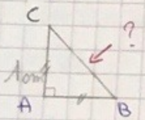
• Le triangle $(5 ; 5 ; 7)$ n'est pas rectangle :

$$\left.\begin{array}{l} 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \\ 7^2 = 49 \end{array}\right\} 49 \neq 50$$



D'après le théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

Question : Quelle est la mesure de l'hypoténuse de ce triangle rectangle :



$CB^2 = 2$

$\sqrt{CB^2} = \sqrt{2}$

$CB = \sqrt{2}$

Le triangle ABC est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$CB^2 = AC^2 + AB^2$

$CB^2 = 1^2 + 1^2$

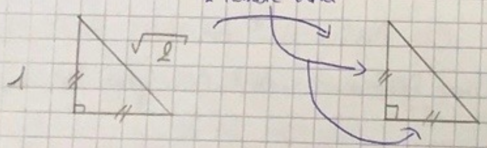
valeur exacte — valeur approchée

$CB^2 = 2 \longrightarrow CB = \sqrt{2} \approx 1,414213562$

Rappel : si x désigne un nombre positif, $\sqrt{x}$ désigne le nombre qui élevé au carré, donne x.

autrement dit : $(\sqrt{x})^2 = x$ 1, 4, 9, 16, 25 ;

× nombre entier



$\sqrt{2}$ × nombre entier = autre nombre entier

$\sqrt{2}$ est-il une fraction ? $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ non !

Il n'y a pas de triangle rectangle isocèle entier

On dit que $\sqrt{2}$ est irrationnel. ce n'est pas une proportion.

exercice :

Voici la liste des racines carrées des premiers nombre entiers positifs :

$\sqrt{1}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{10}$

1) A l'aide de la calculatrice, quelles sont les racines carrées dont le résultat est "simple" ?

2) Trouve d'autres racines carrées dont le résultat est simple.

1) $\sqrt{1} = 1$
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{9} = 3$

2) $\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{144} = 12$

↳ $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ou $(\sqrt{2})^2 = 2$

↳ $\sqrt{3}$: $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ ou $(\sqrt{3})^2 = 3$

↳ $\sqrt{4}$: $\sqrt{4} \times \sqrt{4} = 4$ ou $(\sqrt{4})^2 = 4$ } $\sqrt{4} = 2$
$2 \times 2 = 4$ $2^2 = 4$

↳ $\sqrt{5}$: $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$ ou $(\sqrt{5})^2 = 5$

⋮

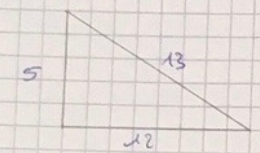
↳ $\sqrt{9}$: $\sqrt{9} \times \sqrt{9} = 9$ ou $(\sqrt{9})^2 = 9$ } $\sqrt{9} = 3$
$3 \times 3 = 9$ ou $3^2 = 9$

On dit que 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,... sont des carrés parfaits.

Ils sont le produit d'un nombre entier par lui-même.

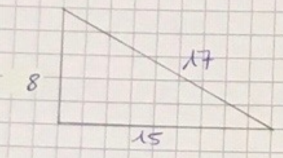
(ex : $1 = 1 \times 1$; $4 = 2 \times 2$; $9 = 3 \times 3$; ...).

Dans le cas des carrés parfaits, les racines carrées sont faciles à calculer.



$5^2 + 12^2 = 169$

$13^2 = 169$



$15^2 + 8^2 = 289$

$17^2 = 289$

Conclusion (temporaire) du problème :

* Le triangle (3 ; 4 ; 5) et tous ses agrandissements sont des triangles rectangles entiers (il y en a une infinité).
* Il n'y a pas de triangle rectangle isocèle entier (car $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction).

III - Utilisation du théorème de Pythagore en géométrie :

donnée. ». Prouve qu'il a tort.

On sait d'autre part que :

$L = \frac{4}{3} l$ (tu pourras utiliser $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$)

Trouve alors les valeurs l et L.

ex 28 :

* D'après le théorème de Pythagore. * Le triangle ABC est rectangle en B.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 90^2 + 120^2$

$AC^2 = 8100 + 14\,400$

$AC^2 = 22\,500$

$\sqrt{AC^2} = \sqrt{22\,500}$

$AC = \sqrt{22\,500} = 150$

D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse est de 150 m.

Les deux coins diagonalement opposés

ex 36 :

D'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$21^2 = 16^2 + BC^2$

$441 = 256 + BC^2$

$BC^2 = 441 - 256$

$BC^2 = 185$

$\sqrt{BC^2} = \sqrt{185}$

$BC = \sqrt{185} \approx 13{,}6$

D'après le théorème de Pythagore, le côté BC mesure environ 13,6 cm.

Le côté [CD] mesure 2 fois plus que le côté [CB] donc [CD] mesure environ 27,2 cm.

* • ABCD est un losange donc :
  - ses diagonales sont perpendiculaires
  - ses diagonales se coupent en leur milieu.

• OCB est un triangle rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore :

$OC^2 + OB^2 = BC^2$

$OC^2 + 16^2 = 21^2$

$OC^2 + 256 = 441$

donc $OC^2 = 441 - 256 = 185$

donc $OC = \sqrt{185} \approx 13,6$

$AC = 2 \times 13,6 = 27,2$

La hauteur du arc est environ 27,2 cm.

ex écrans:

a) • On calcule d_1 : On sait que ABC est rectangle en A tel que AB = 30,6 cm et AC = 23 cm (l'hypoténuse est [BC]). 0,5

D'après le théorème de Pythagore : 0,5

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ 0,5

$BC^2 = 30,6^2 + 23^2$

$BC^2 = 1\,465,36$

$\sqrt{BC^2} = \sqrt{1\,465,36}$ 1

$BC \approx 38$

La diagonale d_1 mesure environ 38 cm.

0,5

pouce	1	≈ 15
cm	2,54	38

d_1 mesure environ 15 pouces.

• On calcule d_2 : On sait que DEF est rectangle en D tel que DE = 34,6 cm et DF = 26 cm (l'hypoténuse est [EF]).

D'après le théorème de Pythagore:

$EF^2 = DE^2 + DF^2$

$EF^2 = 34,6^2 + 26^2$

$EF^2 = \cancel{809\,280,16}$ 1873,16

$\sqrt{EF^2} = \sqrt{809\,280,16}$

$EF = 899,6$ 43,3

La diagonale mesure 899,6 cm soit environ 354 pouces ($1 \times 899,6 \div 2,54 \approx 354$).

17 ($1 \times 43,3 \div 2,54 \approx 17$)

b) $L = \frac{4}{3}\ell \approx 1,33\,\ell$

Le théorème de Pythagore donne l'égalité.

$d^2 = L^2 + \ell^2$

$d = 21''$ donc $21^2 = L^2 + \ell^2$

donc $441 \approx (1,33\,\ell)^2 + \ell^2$

$441 \approx 1,33^2 \times \ell^2 + \ell^2$

$441 \approx 1,77 \times \ell^2 + 1 \times \ell^2$

donc $441 \approx 2,77\,\ell^2$

donc $\ell^2 \approx \frac{441}{2,77} \approx 159,2$

donc $\ell \approx \sqrt{159,2} \approx 12,6$

donc $\ell \approx 12,6''$ et $L = 1,33 \times 12,6 = 16,8''$

exercice 1:

• Pour savoir si l'étagère est perpendiculaire au mur on regarde si ABC est rectangle.

On sait que : AB = 60 cm = 0,6 m

AC = 1,2 m

BC = 1,34 m (côté le plus long).

On calcule séparément:

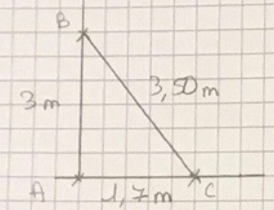
$BC^2 = 1,34^2$	$AB^2 + AC^2 = 0,6^2 + 1,2^2$
$= 1,7956$	$= 1,8$

$BC^2 \neq AC^2 + AB^2$ donc d'après la conséquence du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

Donc l'étagère n'est pas perpendiculaire au mur.

Exercice 2 :

représentation de l'échelle.



On sait que : AB = 3 m
AC = 1,7 m
BC = 3,50 m

$BC^2 = 3{,}50^2$
$= 12{,}25$

$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 1{,}7^2$
$= 11{,}89$

$BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

Le mur n'est pas perpendiculaire au sol.

Les deux rédactions avec le théorème de Pythagore :

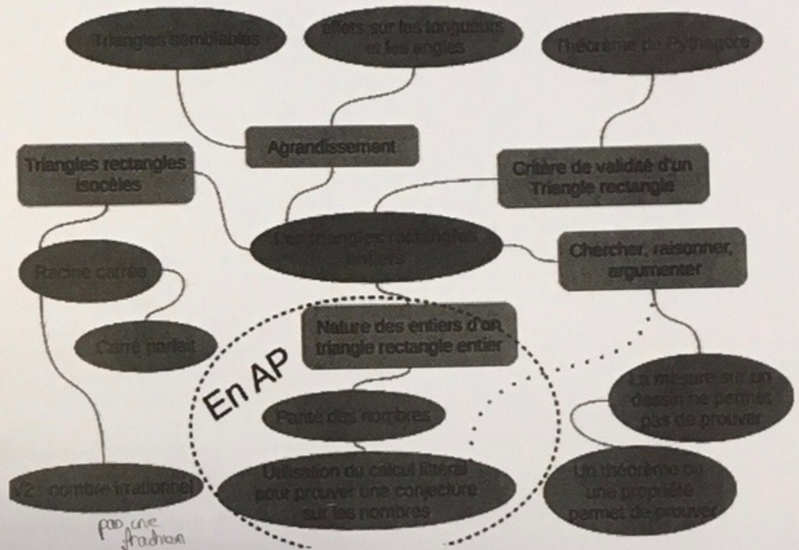
1. Si on sait que le triangle est rectangle et qu'on veut calculer une longueur :
   * Le triangle ... est rectangle en ...
   * D'après le théorème de Pythagore,
     $...^2 = ...^2 + ...^2$
     puis calculs et racine carrée

2. Si on connaît les 3 longueurs et qu'on veut montrer que le triangle est rectangle :
   * (On calcule séparément).
     $...^2 =$
     $...^2 + ...^2 =$
     ↗ si c'est égal, d'après le théorème de Pythagore, le triangle est rectangle
     ↘ si ce n'est pas égal, d'après le théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

IV - Étude des nombres entiers d'un triangle rectangle entier.

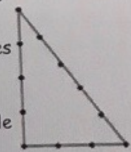
Pistes et conjectures étudiées en AP.

Bilan de l'étude du problème



Culture et informations mathématiques actuelles

- On appelle **triplet pythagoricien**, un ensemble de 3 nombres qui vérifie l'égalité de Pythagore. Par exemple : (3; 4; 5) car $5^2 = 3^2 + 4^2$. Ce triplet est connu depuis l'Antiquité et utilisé par les architectes égyptiens pour tracer des angles droits. Cette technique est d'ailleurs encore employée de nos jours, par les maçons creusois par exemple, sous forme de corde à nœuds : sur une corde fermée, on place 12 nœuds régulièrement espacés. On peut ainsi reconstituer le triangle rectangle (3 ; 4 ; 5), et fabriquer une équerre de poche (pliable !).



Le « grand » théorème de Fermat :
Il n'existe pas de nombres entiers x, y et z qui vérifient l'égalité

$$x^n + y^n = z^n \text{ dès que } n \geq 3$$

Autrement dit, on ne pourra jamais trouver 3 nombres entiers x, y et z non nuls tels que $x^3 + y^3 = z^3$ ou $x^4 + y^4 = z^4$ ...
Cette égalité ne peut exister que pour $n = 2$ avec les triangles rectangles entiers.

Ce théorème a été énoncé au 17ème siècle mais n'a été démontré qu'en 1994 par Andrew Wiles soit environ **300 ans** pour trouver une démonstration correcte et complète !

Extrait cahier élève

3e5

Collège Emile Zola, Belleville, 2018-2019

Bilan de la recherche :

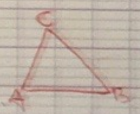
* La mesure n'est pas fiable pour affirmer qu'un triangle rectangle entier existe. Elle est utile pour montrer qu'un triangle rectangle n'a pas tout ses côtés entiers (si l'erreur est importante !)

Bilan de la recherche (3è5) :

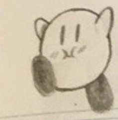
- ➔ La mesure ne permet pas d'affirmer qu'un triangle est rectangle entier (c'est-à-dire que c'est un triangle rectangle dont la mesure de chaque côté est un nombre entier).
- ➔ Le théorème de Pythagore permet de valider de manière certaine qu'un triangle est rectangle ou non.
- ➔ Les triangles rectangles entiers qui ont été validés : (3 ; 4 ; 5) , (6; 8 ; 10) , (9 , 12 , 15)
- ➔ Conjectures/pistes à explorer pour trouver des triangles rectangles entiers
  1. Si l'aire et le périmètre d'un triangle rectangle sont dans la même table, alors les Trois longueurs du Triangle sont des nombres entiers.
  2. Quand on a trouvé un triangle rectangle entier, il suffit de doubler, tripler etc. chaque longueur pour en obtenir d'autres
  3. Certains triangles rectangles isocèles sont entiers (ex : (5,5,7) ou (1,4,4))
  4. Lien avec la parité des longueurs (paires ou impaires) et les nombres premiers

Théorème de pythagore.

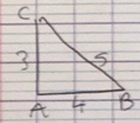
On considère un triangle $\widehat{ABC}$



- Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (sens direct)
- Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A. (Contraposée)
- Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A. (Réciproque)



Ex :



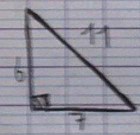
$$\left.\begin{array}{l} AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \\ BC^2 = 5^2 = 25 \end{array}\right\} AB^2 + AC^2 = BC^2$$

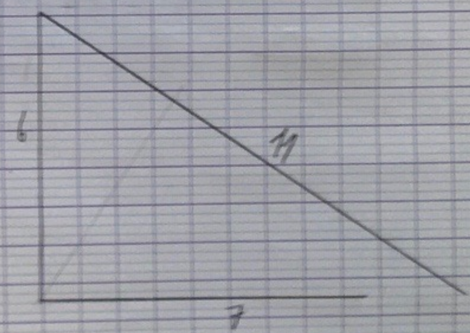
D'après le th de Pyt, le triangle ABC est rectangle en A.

I. Conjecture n°1 : lien entre Aire et périmètre

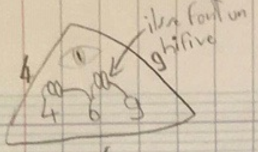
Conjecture : Si l'aire et le périmètre d'un Triangle rectangle sont des nombres entiers qui sont dans la même table, alors les trois longueurs sont des nombres entiers.

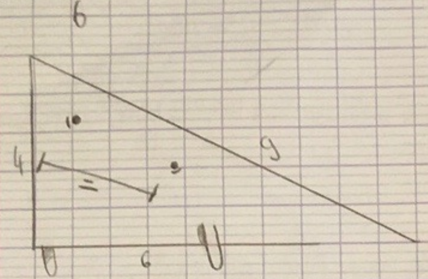
$6 + 7 + 11 = 12$
$5 \times 7 = 35$
pas dans la même table





C'est Faux

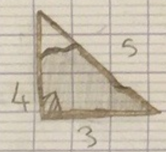


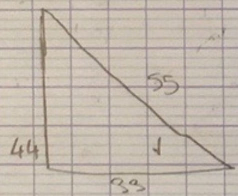


Remarque by Mehdi : Pour calculer le perimètre du triangle rectangle, nous avons besoin de connaître les 3 longueurs.
Pour cela, on utilise le TdP et nous saurons immédiatement si les 3 côtés sont des nombres entiers. La conjecture ne permet pas d'avancer dans la recherche du problème

II. Conjecture n°2 : Agrandir le triangle

Conjecture : Quand on a trouvé un triangle rectangle entiers, il suffit de doubler, tripler, etc, chaque longueurs pour en obtenir d'autres





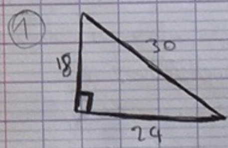
Preuve de la conjecture :

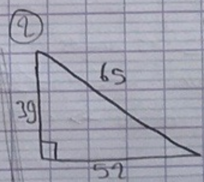
Si on multiplie toutes les longueurs d'un triangle rectangle entier par un même nombre, alors les longueurs du triangles agrandi sont proportionelles aux longueurs du triangle de départ. On dit que les triangles sont semblables
Comme agrandir avec la proportionnalité ne change pas les angles, on conserve l'angle droit et le nouveau triangle est encore rectangle.

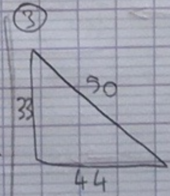
→ La conjecture est vraie

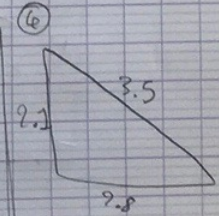
Conclusion : Tout les multiples de 3 ; 4 ; 5 sont des triangles rectangles entiers.
Il y en a une infinité

Exercice : Sans utiliser le TDP, mais en utilisant le fait que le triangle (3;4;5) est un triangle rectangle, trouver les autres triangle rectangles de la liste.







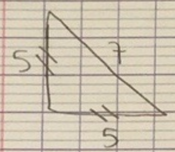


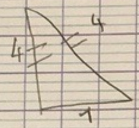
①	②	③	④
$3 \times 6 = 18$	$3 \times 13 = 39$	$3 \times 11 = 33$	$3 \times 0.7 = 2.1$
$5 \times 6 = 30$	$5 \times 13 = 65$	$5 \times 11 = 55$ ✗	$5 \times 0.7 = 3.5$
$4 \times 6 = 24$	$4 \times 13 = 52$	$4 \times 11 = 44$	$4 \times 0.7 = 2.8$
Le triangle est bien rectangle	Rectangle	Pas rectangle	Rectangle

II - Conjecture n°3 : les triangles rectangles isocèles

Conjecture n°3 : Certains triangles isocèles sont rectangles

Ex: $(5,5,7)$ et $(1,4,4)$

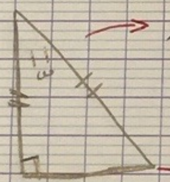




$5^2 + 5^2 = 50$
$7^2 = 49$ $\neq$

$4^2 + 1^2 = 17$
$4^2 = 16$ $\neq$

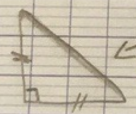
C'est impossible d'avoir un triangle rectangle isocèle de ce type.



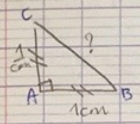
1ère preuve : Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux. Donc on aurait deux angles droits et les côtés seraient parallèles. -> C'est impossible.

2ème preuve : D'après le théorème de pythagore, l'hypoténuse au carré est égale à la somme des carrés des deux autres côtés -> il est forcément plus grand que chacun des deux autres côtés.

Autre type de triangles rectangles isocèles :



Est-ce qu'on peut trouver des triangles rectangles entiers de ce type



• Le triangle ABC est rectangle en A.
• D'après le théorème de pythagore

$BC^2 = AC^2 + AB^2$
$BC^2 = 1^2 + 1^2$
$BC^2 = 2 \rightarrow BC = \sqrt{2}$ cm

$1^2 + 1^2 = 2$

$? = 2$ cm $= \sqrt{2}$ cm

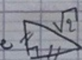
Rappel : Si x désigne un nombre positif,
$\sqrt{x}$ désigne le nombre positif qui, élevé au carré, donne x.
Autrement dit,
$(\sqrt{x})^2 = x$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41\,42\,13\,562...$

Valeur exacte — Valeur approchée

⚠ On ne peut jamais multiplier $\sqrt{2}$ par un nombre entier pour obtenir un autre nombre entier.

C'est un nombre irrationnel.

On ne pourra jamais agrandir suffisamment le triangle 

pour obtenir 3 longueurs entières

Conclusion : Il n'existe pas de rectangle isocèle entier.

Exercice : Voici la liste des racines carrées des premiers nombres entiers :

$\sqrt{1}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{10}$

1) À l'aide de la calculatrice, quelles sont les racines carrées qui ont une valeur "simple" ?

$\sqrt{1}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$;

2) Trouvez d'autres racines carrées qui ont une valeur simple :

$\sqrt{16}$ $\sqrt{100}$ $\sqrt{25}$

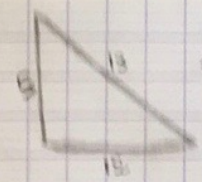
L'Explication :

$7^2 = 7 \times 7 = 49$ donc $\sqrt{49} = 7$
$11^2 = 11 \times 11 = 121$ donc $\sqrt{121} = 11$

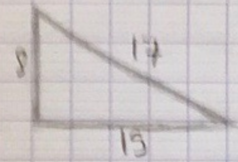
$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$; $\sqrt{11} \times \sqrt{11} = 11$; $\sqrt{16} \times \sqrt{16} = 16$
$4 \times 4 = 16$

La racine carrée est facile à calculer quand c'est un carré parfait
↳ nombre entier fois lui-même

C'était l'explication



$\begin{cases} 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \\ 13^2 = 169 \end{cases}$



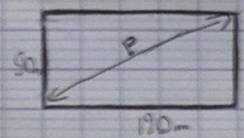
$\begin{cases} 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \\ 17^2 = 17 \times 17 = 289 \end{cases}$

Conclusion (temporaire) :

* Le triangle (3 ; 4 ; 5) est rectangle entier ainsi que tous ses agrandissements (il y en a une infinité)
* Il n'existe pas de triangle rectangle isocèle entier (car $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction)

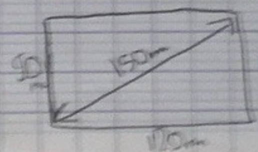
IV - Utilisation du théorème de Pythagore en géométrie

Ex 28



$90\text{mm}^2 + 120\text{mm}^2 = 8100 + 14400 = 22500$

$\sqrt{22500} = 150\text{mm}$



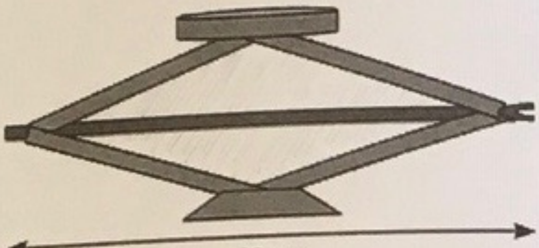
28 Un terrain de football rectangulaire a pour longueur 120 m et pour largeur 90 m.

Calcule la distance séparant deux points de corner diagonalement opposés.

63 ***Allumettes***

Dans une boite d'allumettes de dimensions 5,3 cm × 3,6 cm × 1,5 cm, est-il possible de ranger une allumette mesurant 6,5 cm sans la briser ?

36 Le cric d'une voiture a la forme d'un losange de 21 cm de côté.

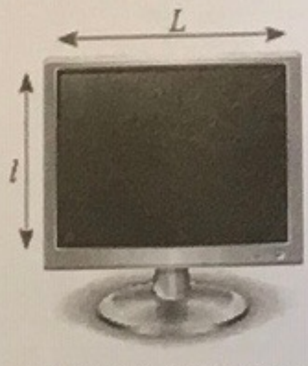


À quelle hauteur soulève-t-il la voiture lorsque la diagonale horizontale mesure 32 cm ?

42

Pour répertorier ses moniteurs, un brocanteur relève leurs caractéristiques, notamment leurs longueurs et leurs largeurs :
$L_1 = 30{,}6$ cm et $l_1 = 23$ cm ;
$L_2 = 34{,}6$ cm et $l_2 = 26$ cm.

Or, dans son logiciel, la taille des moniteurs est répertoriée selon la diagonale des écrans en pouces.



a. Sachant qu'un pouce (noté 1") vaut 2,54 cm, retrouve les tailles d_1 et d_2 des moniteurs, en pouces, arrondies à l'unité.

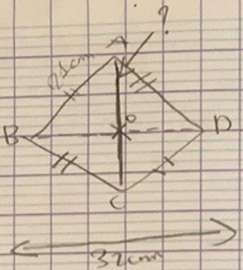
b. Le brocanteur va recevoir un nouveau moniteur de 21". Il veut retrouver ses dimensions l et L. Son employé lui dit : « C'est simple car il n'existe qu'un seul rectangle de diagonale donnée. ». Prouve qu'il a tort.

On sait d'autre part que :

$L = \frac{4}{3} l$ (tu pourras utiliser $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$)

Trouve alors les valeurs l et L.

Ex 36 :



• ABCD est un losange, donc :

- Ses diagonales sont perpen.
- Ses diagonales se coupent en leur milieu.

• Le triangle ABO est rectangle en O.
• D'après le théorème de pythagore

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

$21^2 = AO^2 + 16^2$

donc $AO^2 = 21^2 - 16^2 = 185$

donc $AO = \sqrt{185} \approx 13,6$

$AC \approx 2 \times 13.6 = 27.2.$

La hauteur du Cric est d'environ 27.2 cm

Ex 42 :

a. $30,6^2 + 23^2 = 495334.44$ A

$\sqrt{A} = 703.8$ cm

$703.8 \div 2.54 = 277$ pouces

$34.6^2 + 26^2 = 809280.16$ B

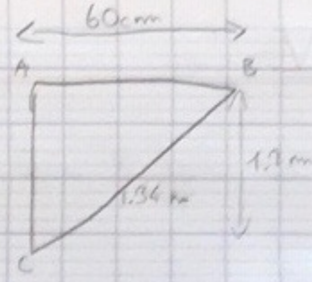
$\sqrt{B} = 899.6$

$899.6 \div 2.54 = 354.17$ pouces

b. Je prouve qu'il a tord

Exercice :

L'étagère est elle perpend. ?



$0.60^2 + 1.2^2 = 1.8$

$1.34^2 = 1.7956$

$AB^2 + AC^2 \neq BC^2$

D'aprè le théorème de pythagore l'étagère n'est pas perpendiculaire au mur

(1) Si on sait que le triangle est rectangle et on veut calculer une longeur :

→ le triangle ... est rectangle en ...

→ D'aprè le théorème de pythagore,

$...^2 + ...^2 = ...^2$

puis on calcule et on la racine carrée.

(2) On connait les trois longueurs, et on veut vérifier que le triangle est rectangle.

→ on calcule séparément

* le plus grand côté au carré : $...^2$
* la somme des carré des deux autres côtés : $...^2 + ...^2$

Si = : D'aprè le théorème de pythagore, le triangle est rectangle

Si ≠ : D'aprè le théorème de pythagore, le triangle n'est pas rectangle.