

Une mise en œuvre du problème des nombres trapézoïdaux.

Niveau : troisième

Choix du problème

Ce problème est propice à l'utilisation du calcul littéral principalement pour démontrer les conjectures des élèves. Je le mets en œuvre au moment où la progression commune nécessite le travail sur le calcul littéral qui est censé faire travailler la distributivité (simple et double) pour développer et factoriser, et la démonstration par le calcul littéral.

Choix de l'énoncé

Quels sont les nombres entiers naturels qui sont la somme d'au moins deux entiers naturels successifs ?

Les élèves travaillent en ilots de 3 ou 4 tout au long de la séquence.

Séance 1 et 2 (2 fois 1h) Recherche et rédaction des affiches.

- Présentation du problème (5 minutes)
- Appropriation individuelle (5 à 10 minutes)
- Recherche en groupe et rédaction d'affiches

L'utilisation massive de la calculatrice a fourni beaucoup de données à tous les groupes. Il a fallu prévoir une deuxième heure de travail pour que les élèves analysent leurs résultats et rédigent des affiches.

Deux approches sont adoptées :

- Calculs organisés de sommes à 2 termes, 3 termes etc.
- Tentatives de décomposition des premiers nombres entiers naturels

Séance 3 (1h) Débat

- Présentation des affiches et discussions dans le but d'établir une série de conjectures
- Bilan de la recherche de la classe : conjectures validées par la classe et mise en lumière des deux approches différentes et de leur apport.

Voici la liste des conjectures établies par les élèves.

- Les nombres impairs sont trapézoïdaux, Ils sont la somme de deux nombres successifs. L'approche par décomposition a fourni un algorithme permettant de décomposer un nombre impair quelconque en somme de deux entiers successifs
- La somme de 3 entiers consécutifs donne les nombres de la table de 3
- La somme de 5 ou de 7 entiers successifs donne les nombres des tables respectivement de 5 et de 7 à partir d'un certain rang.. Cette conjecture est généralisée à tous les nombres impairs de termes dans la somme.
- 1, 2, 4, 8, 16 et 32 semblent être les seuls nombres non trapézoïdaux
- Certains nombres peuvent s'obtenir avec des sommes différentes par exemple $9=4+5=2+3+4$

Aucune de ces conjectures n'a fait l'objet de démonstration ni d'explication par les élèves. L'accumulation d'exemples a suffi à convaincre les élèves. La démonstration et la validation finale des conjectures se feront au cours des développements.

Séance 4 (1h) Développement 1 Démonstration de la conjecture « les impairs sont trapézoïdaux », caractérisation des nombres pairs et impairs.

Rituel : programmes de calcul

- Définition de nombre pair/impair
- Rappels du vocabulaire multiple/diviseur et des critères de divisibilité qui nécessitent un long travail de réactivation/
Les élèves reformulent toutes les conjectures en y intégrant ce vocabulaire.
- Ecriture des nombres pairs sous la forme $2k$ et des impairs sous la forme $2k+1$
- L'approche par calcul des sommes sert à démontrer que la somme de deux entiers consécutifs donne toujours un nombre impair. Si n est le premier terme la somme est $n + (n + 1) = 2n + 1$ qui est un nombre impair
- L'approche qui consiste à choisir un nombre impair et à en faire une somme de deux entiers successifs permet de démontrer que **tous** les impairs sont trapézoïdaux et fournit un algorithme sous forme d'un programme de calcul pour effectuer cette décomposition

Séance 5 (1h) Développement 2 Preuve de la conjecture « la somme de 3 entiers successifs donne les multiples de 3 », factorisation et distributivité simple

Rituel : programmes de calcul + critères de divisibilité

- Rappel de la conjecture reformulée avec le vocabulaire adapté
- Les élèves réinvestissent d'eux-mêmes le mécanisme de preuve vu la séance précédente : Si n est le premier nombre la somme est $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$. Cette expression les laisse perplexes : ils voient des 3 de partout, mais pas d'écriture d'un multiple de 3.
Je leur fait écrire une caractérisation d'un multiple de 3 similaire à celle vue pour les nombres pairs $3 \times \text{quelquechose}$ et un élève propose de faire la distributivité à l'envers.
- Travail sur la distributivité simple (déjà travaillée en cinquième et quatrième pour développer) pour développer et factoriser + réintroduction du vocabulaire développer/réduire/factoriser
- Exercices autour de la distributivité simple
- Finalisation de la démonstration

Séance 6 (1h) Généralisation de la preuve précédente à n'importe quel nombre impair de termes dans la somme

Rituel : forme développée/forme factorisée

- Généralisation de la démonstration « la somme d'un nombre impair k d'entiers successifs donne tous les multiples de k à partir d'un certain rang »
- Entraînement technique développement/factorisation

Certains élèves ont manifesté leur lassitude. La réponse de la classe a été surprenante « on a passé 3 h à chercher ce problème et là on commence à comprendre la solution, donc on continue ». J'ai présenté une ébauche de carte mentale en listant toutes les notions abordées, et cela a fait l'unanimité : le travail autour de ce problème a repris avec de l'entrain.

Séance 7 (1h) Démonstration de la conjecture « les puissances de 2 ne peuvent pas être des nombres trapézoïdaux »- double distributivité

Rituel : Distributivité simple en développement et factorisation

- Démonstration magistrale de la conjecture. Celle-ci fait intervenir la double distributivité (déjà vue en quatrième) et un raisonnement par disjonction des cas selon la parité. J'ai fortement insisté sur ce type de raisonnement.
- Exercices sur la double distributivité.

Problème officiellement clos pour la classe

Séance 8 (1h) institutionnalisation

Rituel : distributivité simple et double

- Exercices de double distributivité
- Rencontre avec les identités remarquables au détour d'un exercice
- Distribution de la leçon synthétisant tous les points vus au cours de la résolution du problème.
- Distribution de la carte mentale de la résolution du problème

Séance 9 (1h) Entraînement sur des exercices type brevet