Simon Modeste
simon.modeste@umontpellier.fr

L'entrepôt – Clôture
Une résolution

Nous proposons ici une (ou plusieurs) résolution(s) possible du problème de l'entrepôt. Ce texte s'adresse directement aux enseignants pour les accompagner dans l'organisation de la clôture dans leur classe de la session de résolution collaborative de problème.

1. Le problème suite à la modélisation

Le problème proposé à l'issu de la fiction relancée est le suivant :

> Où positionner l'entrepôt afin de minimiser la distance parcourue par le camion en effectuant tous les approvisionnements demandés par les usines ?

On peut imaginer deux façons de livrer les usines depuis l'entrepôt :
Livraison directe : un camion part livrer une usine et revient directement à l'entrepôt.
Livraison en tournée : un camion peut livrer une ou plusieurs usines avant de retourner à l'entrepôt.

2. Livraison directe, le problème mathématique associé

Le problème se reformule ainsi. Il faut effectuer un certain nombre de livraisons directes chaque semaine à chaque usine depuis l'entrepôt.

> ***Un cas simplifié : une seule livraison par usine par semaine.***

Supposons, dans un premier temps un cas où il faut livrer chaque usine une seule fois. Le problème mathématique est celui du *point de Fermat* : étant donné n points $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans le plan, on appelle point de Fermat un point P qui minimise la somme des distances $\sum_i PA_i$.

Note : il n'y a pas unicité du point de Fermat (voir le cas de deux points).

Note : Le point de Fermat n'est pas l'isobarycentre des points. Le barycentre annule une somme de vecteurs et le point de Fermat minimise une somme de longueurs.

Comment trouver le point de Fermat dans notre cas ? Déterminer un point de Fermat n'est pas toujours simple. Dans le cas de trois points, il existe une construction géométrique qui est accessible au collège voir références en fin de document). Pour 4 points, il existe des méthodes mais les choses restent complexes (voir références).

On peut aussi utiliser un logiciel de géométrie dynamique comme Géogebra. En mettant la carte en image de fond, on peut placer les points correspondants aux usines (appelons-les T, N, E et F) et un point mobile M qui représente la position de l'entrepôt. On peut afficher le « coût » associé à la position de l'entrepôt en calculant la somme des distances MT + MN + ME + MF. En déplaçant le point M, on peut chercher quelle est la (ou une) position qui minimise cette somme.

Note : Pour avoir le coût exact, il faudrait prendre en compte l'échelle et prendre en compte chaque distance deux fois (aller-retour) : minimiser 2MT + 2MN + 2ME + 2MF revient au même et le point déterminé ne change pas.

Retour au cas de plusieurs livraisons pour certaines usines

La solution précédente n'est pas satisfaisante car nous avons mis de côté le fait que certaines usines ont besoin de plus d'une livraison par semaine. Si l'on reste en livraison directe, il faut envisager pour chaque usine le nombre minimal de livraisons qui couvre les besoins hebdomadaires.

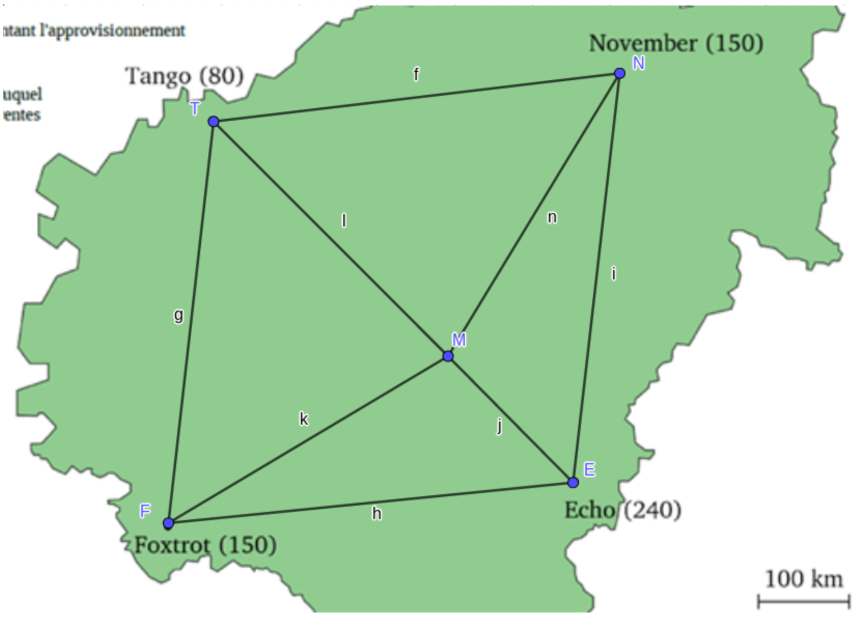
Cela donne les nombres de livraisons suivants : Tango (1), November (2), Echo (2) et Foxtrot (2). Il s'agit alors de minimiser la somme des distances aux usines pondérées par le nombre de livraisons de chacune. On pourrait appeler cela « problème du *point de Fermat pondéré* » : étant donné n points $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans le plan et des réels positifs $(\delta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on appelle point de Fermat pondéré un point P qui minimise la somme des distances pondérées $\sum_i \delta_i.PA_i$.

Note : Le point de Fermat pondéré n'est pas le barycentre de la famille de points $\{(A_i,\delta_i)/1\leqslant i\leqslant n\}$.

Note : rechercher le point de Fermat pondéré est un problème au moins aussi complexe que celui du point de Fermat. Il n'y a pas de méthode mathématique directe pour le déterminer simplement.

Dans notre cas, il est possible de résoudre le problème avec Géogébra (comme fait précédemment). La somme à minimiser est MT + 2MN + 2ME + 2MF avec M un point mobile (ou le double si l'on compte les aller-retours).

De cette façon, on trouve une position pour le point M qui est celle ci :



On trouve alors que les livraisons hebdomadaires demandent de parcourir environ 4550 km en camion. L'entrepôt qui atteint le minimum se situe à environ 200 km de Echo en direction de Tango.

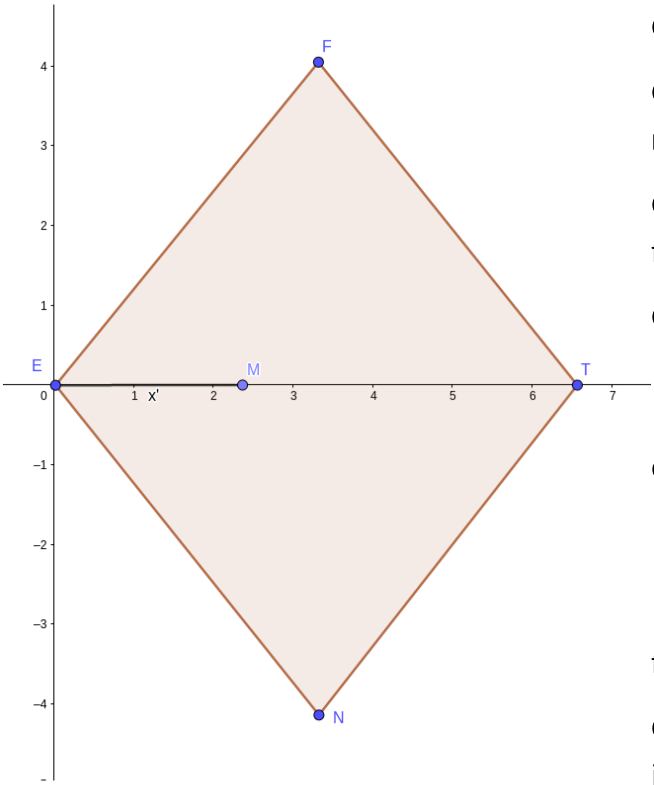
Il faut ensuite voir comment peuvent être organisées les livraisons sur la semaine (et s'il faut envisager ou non plusieurs chauffeurs).

Une autre méthode dans cette situation : minimum d'une fonction

Une idée pour chercher la position du point M qui minimise la somme des distances pourrait être de se placer dans un repère et d'étudier la valeur de la fonction de coût en fonction de la position de M donnée par ses coordonnées (x_M, y_M). Cela donnerait une fonction a deux variables dont on pourrait essayer de déterminer un minimum.

Nous allons adapter cette idée en nous appuyant sur la symétrie du problème proposé. En effet, si l'on considère que TNEF est un losange (quitte à faire de toutes petites approximations), et comme les poids associés à F et N sont les mêmes, on peut chercher la position de M qui minimise le coût sur le segment [TE]. (Note : cela semble assez naturel, mais nécessite une argumentation assez fine pur le justifier précisément).

Choisissons un repère orthonormé direct adapté à la résolution de notre problème, c'est-à-dire avec le l'axe des abscisses orienté selon le vecteur $\vec{ET}$, comme ici.



On pose x la distance EM.

On peut exprimer les coordonnées de points dans ce repère : $E(0,0), T(x_T,0), F(x_F,y_F), N(x_F,-y_F)$.

On peut alors exprimer 2MT + 4MN + 4ME + 4MF en fonction de x et des coordonnées de E, F, T et N.

On obtient une fonction, qu'on nomme d :

$$d(x) = 2x + (x_T - x) + 4\sqrt{(x_F - x)^2 + y_F^2}$$

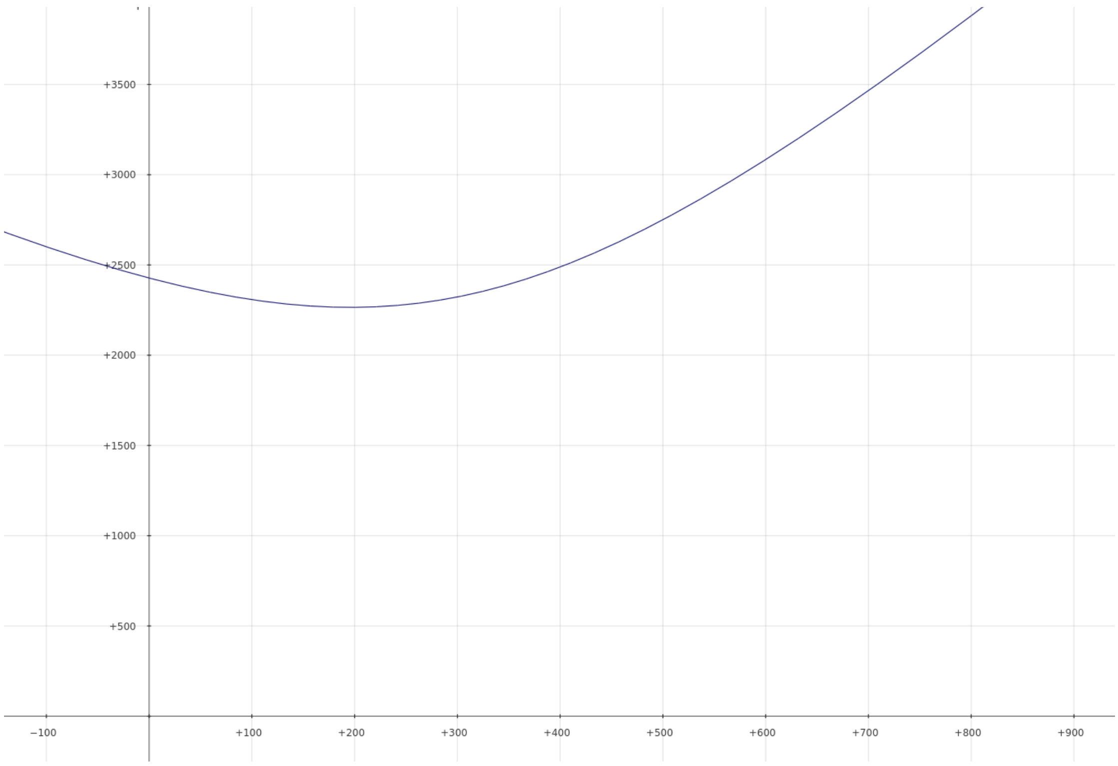
qu'on peut simplifier :

$$d(x) = x + x_T + 4\sqrt{(x_F - x)^2 + y_F^2}$$

Il s'agit maintenant de chercher un minimum à cette fonction.

On peut déterminer les valeurs des constantes mises en jeu (coordonnées des sommets du losange). En tenant compte de l'échelle, on a x_T = 578 km, x_F = 289 km et y_F = 361 km.

La fonction à étudier est donc : $d(x) = 2x + (578 - x) + 4\sqrt{(289 - x)^2 + 361^2}$.



Avec un traceur (image ci-dessus) ou avec un outil de calcul scientifique ou formel, on peut trouver que le minimum est atteint pour x proche de 196 km. La valeur de la fonction à ce minimum est d'environ 2265 km. Ce qui donne 4530 km à parcourir si l'on prend en compte les aller-retours.

Note : Ce résultat est très proche du résultat obtenu de manière expérimentale juste avant.

Et pourquoi ne pas prendre pour poids le nombre d'unités de marchandise nécessaire ?

On pourrait avoir envie de prendre pour poids des points T, F, E et N les valeurs en nombre de marchandise à livrer chaque semaine ou les quotients de ces nombres par la capacité d'un camion.

Cela aurait du sens si l'on livrait avec des camions dont le coût est proportionnel à la quantité chargée ou des camions qui livrent tous une unité de marchandise. Ce n'est pas le cas ici, mais résoudre cette version du problème donnerait un majorant pour la solution optimale avec une livraison directe. Cela donne en quelque sorte une « solution moyenne », qu'on peut mettre en lien avec la section 5 plus loin.

3. Livraison en tournée, le problème mathématique associé

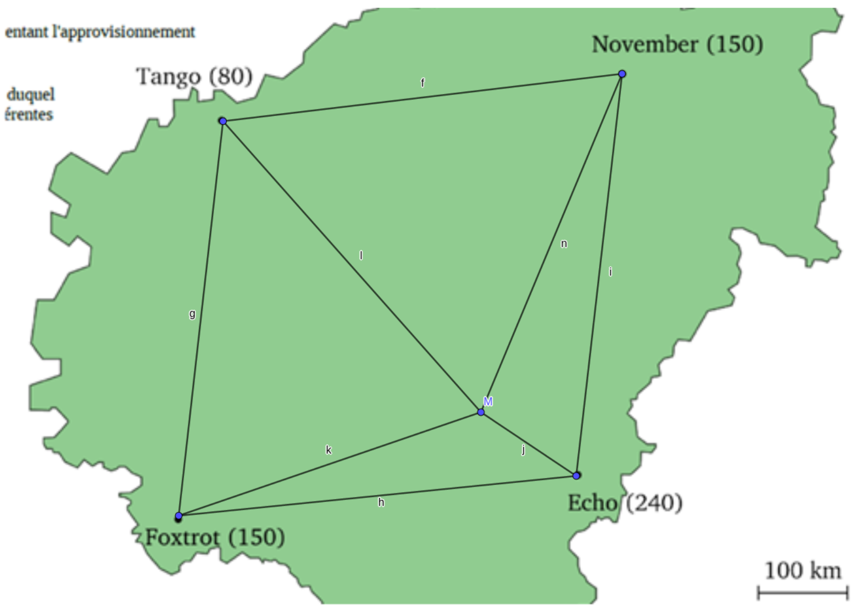
Une autre possibilité pour organiser les livraisons est de livrer en tournée. On peut penser qu'il est intéressant de faire une tournée lorsque l'on évite d'avoir un camion partiellement plein sur un trajet ou que deux usines sont assez proches. Ici, la situation pousse à vouloir livrer ensemble Tango et November, compte tenu du fait qu'à elles deux les usines nécessitent un peu moins de deux camions (230 unités).

On peut par exemple étudier le cas suivant : 1 livraison directe à Foxtrot, 2 livraisons directes à Echo, une livraison directe à November et une tournée Entrepôt → November → Tango → Entrepôt. Cela permet bien d'apporter toutes les marchandises nécessaires hebdomadairement à chaque usine.

Si l'on nomme toujours M le point représentant l'entrepôt, il s'agit de chercher la position de M qui minimise 4MF + 4ME + 2MN + MN + NT + MT autrement dit 4MF + 4ME + 3MN + NT + MT.

Note : Ici, comme tous les trajets ne sont pas des aller-retours, il faut faire attention au fait qu'il n'est pas possible de seulement prendre en compte l'aller pour trouver la position de l'entrepôt.

Note : NT étant fixe, la position optimale de M (pour cette distribution précisément) ne dépend pas de la distance NT. Elle entre cependant en compte dans le coût de la solution, ce qui est important pour comparer avec les autres solutions trouvées pour d'autres distributions.



On peut à nouveau travailler avec Géogebra et chercher la position d'un point mobile M qui minimise le coût de cette livraison avec tournée. On obtient la position ci-dessus pour M, avec un parcours de 4186 km (ce qui est mieux que ce que nous avons obtenu avec des livraisons directes).

4. Retour sur la livraison directe : si l'on regarde sur plusieurs semaines...

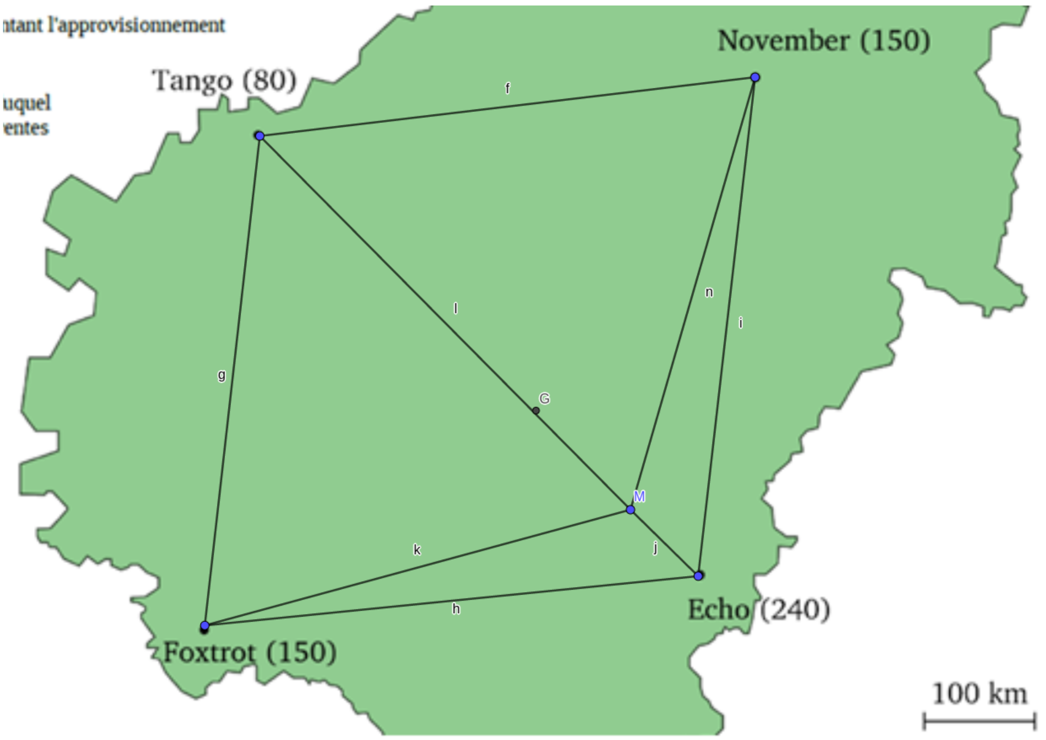
On peut décider, comme proposé dans la fiction relancée, d'avoir un certain stockage sur le site d'une usine. Cela permet d'envisager des livraisons par camion plein certaines semaines, même s'il manque moins de 120 unités de marchandise à l'usine. Ainsi, on peut prendre de l'avance sur les livraisons de la semaine suivante et faire des économies. On peut alors envisager d'organiser les livraisons non pas à la semaine mais par rapport à un besoin à plus long terme (15 jours, 1 mois, plusieurs mois, etc.).

Organisation sur deux semaines

Si l'on pense l'organisation des livraisons sur une période de quatre semaines, il faut livrer à chaque usine : Tango (320), November (600), Foxtrot (600) et Echo (960). On peut faire ce choix en se disant que les 30 unités qu'il faut livrer en plus d'un camion plein chaque semaine à Foxtrot et November peuvent être livrées en un camion plein une fois toutes les quatre semaines.

On choisit d'envisager des livraisons directes, c'est-à-dire que, pendant les quatre semaines, il faut faire les nombres de livraisons suivants : Tango (3), November (5), Foxtrot (5) et Echo (8).

On peut à nouveau utiliser les méthodes de résolution vues précédemment. On trouve que la meilleure position pour l'entrepôt est celle ci-dessous, où l'entrepôt est à 78 km de Echo et la distance parcourue en camion est d'environ 12 637 km pour quatre semaines, soit 3159 km en moyenne chaque semaine.



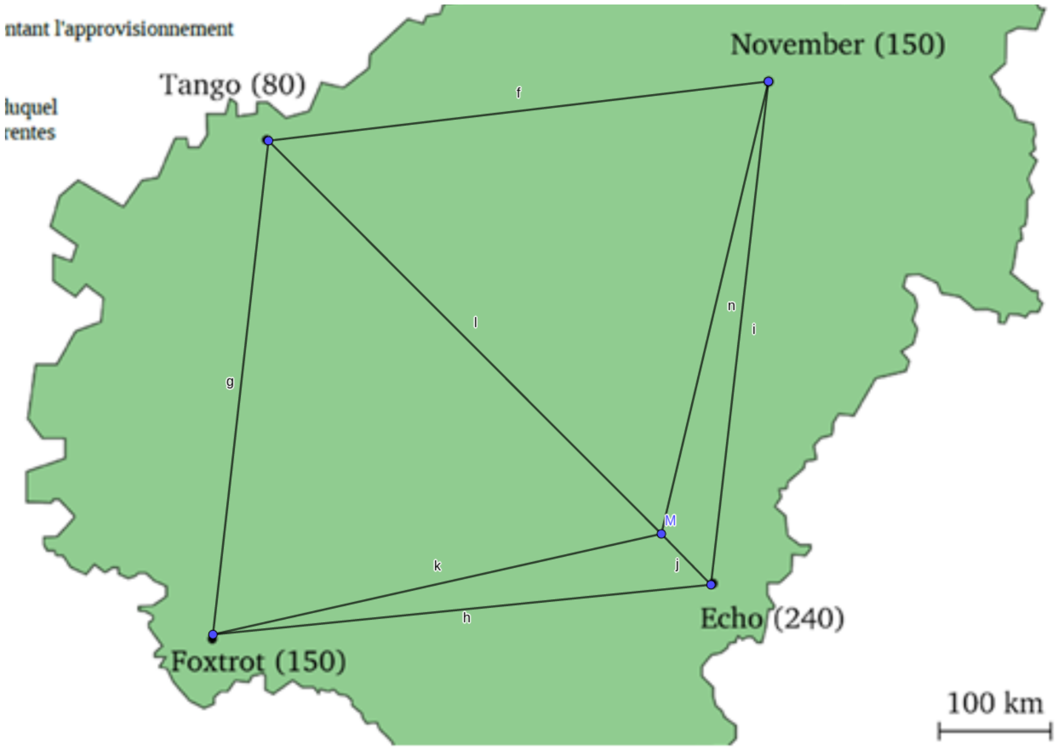
Cette solution est meilleure que celles précédemment trouvées. En pratique, il faudrait livrer Tango 1 fois les 3 premières semaines et ne pas la livrer la quatrième, et livrer Foxtrot et November 10 fois sur quatre semaine, soit par exemple 3 fois une semaine et 2 fois la suivante.

Note : Le point G est le barycentre des points T, N, E, F pondérés par la quantité de marchandise à livrer chaque semaine. On voit qu'il est assez éloigné de M ici. Depuis G, une livraison directe organisée de manière identique sur 4 semaines nécessiterait un parcours d'environ 3250 km.

Organisation sur 12 semaines

Dans la solution précédente, on ne livre pas toujours des camions pleins à Tango (320 unités en 3 livraisons). Pour aller plus loin dans l'optimisation sur plusieurs semaines, on peut chercher à trouver la période pour laquelle chaque usine aura besoin d'un nombre exact de camions pleins.

On trouve que ce sera 12 semaines. Les livraisons, en nombre de camions pleins, sont alors : Tango (8), November (15), Foxtrot (15) et Echo (24). Cela permet de trouver la position de l'entrepôt ci-dessous, qui minimise la distance parcourue à environ 36 900 km sur 12 semaines, soit 3075 km en moyenne par semaine. Cette solution est meilleure que les solutions précédentes.



L'entrepôt est situé à environ 65 km de Echo, ce qui n'est pas très différent de la solution précédente. C'est surtout l'économie de certaines livraisons qui semble faire la différence ici.

5. Retour à la situation réelle

Le travail réalisé à l'intérieur du modèle fixé par la relance peut maintenant être mis en perspective avec le problème initial posé dans la fiction réaliste. La solution de livraison retenue (livraison directe ou tournée, sur une, quatre ou douze semaines) peut être questionnée quant à sa réalisabilité pratique (routes, chauffeurs, organisation de la gestion des stocks, etc.). Une fois une solution retenue, on peut supposer qu'on cherche un terrain adapté à l'entreprise dans un certain rayon autour de la solution trouvée mathématiquement.

Compte-tenu de la faible distance entre la position suggérée de l'entrepôt et Echo dans les solutions, il est légitime de se demander si l'entrepôt ne pourrait pas être fait sur le site Echo (cela pourrait être avantageux sur certains aspects pour l'entreprise).

Si l'on évalue la distance à parcourir en plaçant l'entrepôt en Echo, on trouve environ : 4292 km pour la solution en tournée, 3191 km pour la solution sur 4 semaines et 3095 km pour celle sur 12 semaines. La différence de coût est suffisamment faible pour se poser la question.

Quelques liens :

https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/PointFermat.pdf

http://serge.mehl.free.fr/anx/pt_fermat.html

https://mgje.github.io/presentations/Budapest2014/slides_Fermat-Weber.pdf

https://nanopdf.com/downloadFile/bo-somme-des-distances-dun-point-a-un-ensemble-fini-de_pdf

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/squelettes/fic_x.php?num=79&rang=6

http://goga.perso.math.cnrs.fr/presentation_sem_math_2015_animation.pdf