Université de
Montpellier

GROUPE RESCO 2014-2015

Solution au problème : "Le parc d'éoliennes et le champ d'Eva".

Jean Malgoire

I. Modélisation du problème : On modélise le parc d'éoliennes sur les terres d'Eva par le réseau $\mathbb{Z}^2$ des points "entiers" du plan $\mathbb{R}^2$; chaque éolienne est identifiée à un point entier du plan c.a.d. à un couple (a, b) où a et b sont des entiers relatifs quelconques . On place l'éoliennne d'Eva à l'origine O=$(0, 0)$.
La question mathématique est alors la suivante :

Quelle est la plus grande aire possible d'un rectangle centré en l'origine de $\mathbb{R}^2$ ne contenant en son intérieur pas d'autre point entier que l'origine (*)?

Théorème A : *La réponse à la question précédente est 4.*

((*)il peut y avoir des points entiers sur les bords du rectangle).

Interprétation : cela donne donc une aire de 4 hectares maximum pour le champ d'Eva (avec des éoliennes "tout les hectomètres"). Remarque : cette aire maximum est obtenue par exemple par le champ (horizontal) carré $C = [-1, +1] \times [-1, +1]$. On verra plus loin que cette aire de 4 est obtenue par une infinité de champs rectangulaires....

Il s'agit donc maintenant de démontrer de théorème A!

Cela va nécessiter plusieurs étapes.

Premières explorations : Soit R un champ rectangulaire tel que décrit dans la question. On examine ce qui peut nous empécher d'agrandir ce champ :

Soient Δ et Δ' les deux axes de symétrie de R. Si sur deux cotés opposés de R (parallèles à Δ par exemple et donc symétriques par rapport à cet axe) ne se trouve pas de point entier, on pourra agrandir R en "poussant" ces deux cotés de manière symétrique.
C'est une question délicate de prouver qu'en agrandissant ainsi R on va bien finir par toucher un point entier. Si ce n'était pas le cas on obtiendrait une *bande* infinie d'axe médian Δ sans point entier intérieur excepté O, et donc des rectangles d'aire aussi grande qu'on le souhaite. On montrera plus loin que l'existence d'une telle bande infinie est impossible : disons seulement ici que la preuve est directement liée aux propriétés du développement en fractions continues de la pente de Δ.

Pour arriver directement à un résultat qui se prouve plus simplement (c.a.d. sans utiliser la théorie des fractions continues...) nous allons affaiblir le théorème A en un théorème B suivant:

II. Théorème B: *Soit R un rectangle centré à l'origine du plan $\mathbb{R}^2$ ne contenant en son intérieur aucun point entier autre que O et tel que le milieu d'au moins un coté de R soit entier (donc par symétrie le milieu du coté opposé est donc lui aussi entier...). Alors l'aire de R est inférieure ou égale à 4.([en fait elle égale à 4]*

Pour prouver B nous aurons besoin du lemme suivant (fort intéressant par lui même) :

Lemme (dit "des arbres qui cachent la forêt"):*Soit $P = (a, b)$ un point entier de $\mathbb{R}^2$, le segment OP (joignant l'origine à P) ne contient pas de point entier intérieur à OP (cad distinct de O et P) si et seulement si a et b sont premiers entre eux.*

Preuve : Les points entiers intérieurs de OP sont précisement les couples $(a', b') = (a/n, b/n)$ pour n entier positif différent de 1 divisant a et b.

Remarque : les points entiers (a, b) avec a et b premiers entre eux sont donc les points visibles depuis l'origine parmi tous les points entiers. (les autres sont cachés...). On les appellera **points visibles**.
Remarque : les points entiers qui ne sont pas visibles sont donc les points divisibles !

Nous aurons besoin aussi du théorème de Bézout :

Théorème de Bézout.
Soit a et b deux nombres entiers positifs (non nuls) alors on a l'équivalence :
a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des entiers x et y tels que $ay - bx = 1$

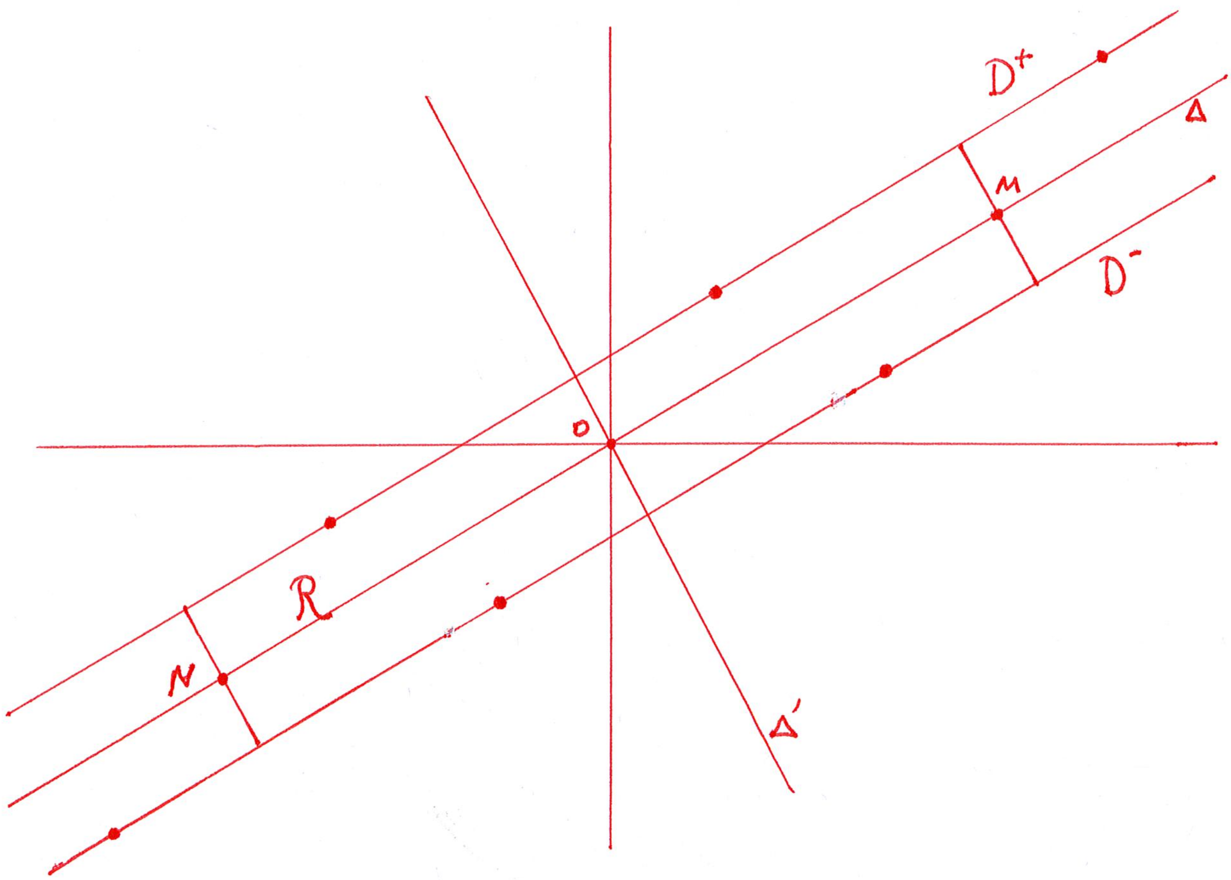
Démonstration (constructive...): Elle est basée sur le célèbre **algorithme d'Euclide** du calcul du pgcd de deux nombres entiers a et b (on divise le plus grand par le plus petit on obtient un reste r, on divise alors le plus petit par ce reste et on continue.... Si a et b sont premiers entre eux on arrive finalement à un reste égal à 1 et en "remontant" la suite des égalités, on exprime 1 sous la forme $1 = ay_0 - bx_0$. La réciproque est claire : si l'on a une relation $ay - bx = 1$ avec x et y entiers, comme tout diviseur commun de a et b divise $ay - bx$, a et b sont premiers entre eux...

Commentaires et complèments sur Bézout :

A partir d'une solution entière de (x_0, y_0) on peut déterminer *toutes* les autres solutions entières (x, y) de l'équation $bx - ay = 1$. En effet par différence terme à terme de $bx_0 - ay_0 = 1$ et de $bx - ay = 1$ nous avons $b(x_0 - x) - a(y_0 - y) = 0$ ou encore comme $b \neq 0$: $\frac{x_0 - x}{y_0 - y} = \frac{a}{b}$.
Comme a et b sont premiers entre eux cela signifie qu'il existe un entier n non nul tel que $x_0 - x = na$ et $y_0 - y = nb$, ou encore $(x, y) = (x_0, y_0) + n(a, b)$; et de même à partir d'une solution (entière) (x_1, y_1) de $ay - bx = -1$ (par exemple $(-x_0, -y_0)$) on obtient toutes les solutions (entières) de $ay - bx = -1$: $(x, y) = (x_1, y_1) + n(a, b)$.

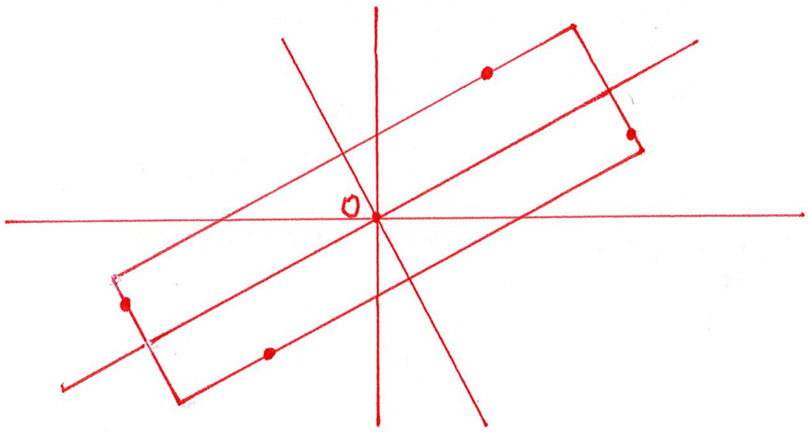
Interprétation géométrique : Soient D^+ la droite d'équation $ay - bx = 1$ et D^- la droite d'équation $ay - bx = -1$. Ce sont deux droites parallèles et équidistantes de la droite Δ d'équation $y = (a/b)x$ qui contient O et $A = (a, b)$. Le fait que le point $A = (a, b)$ est visible entraine l'existence "de part et d'autre" de lui d'une infinité d'autres points visibles sur chacune de deux droites D^+ et D^- (en fait *tous* leurs points entiers).
[En fait on a la proposition suivante: D^+ et D^- sont les bords de la bande la plus large centrée de Δ ne contenant pas de point entier intérieur en dehors de ceux de Δ (Voir la figure ci dessous). La preuve utilise les propositions 1 et 2 du paragraphe III suivant : les parallélogrammes construits sur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OX}$ avec X entier sur D^+ ou D^-, sont tous d'aire égale à 1 (par Bézout) donc (proposition 2) ils sont sans point intérieur.]

Démonstration du théorème B : Soit donc un rectangle R tel que décrit dans le théorème B. Quitte à choisir une autre orientation de l'axe des abscisses on peut supposer que l'axe de symétrie Δ de R, contenant les deux points entiers $M = (a, b)$ et $N = (-a, -b)$ du bord de R au milieu de deux cotés opposés, soit de pente positive. . Comme OA est inclus dans R, a et b sont premiers entre eux. On est dans la situation décrite précédemment. Montrons que R est inclus dans la bande limitée par les droites D^+ et D^- : Par l'absurde si R n'est pas inclus dans cette bande, Δ et Δ' coupent R sur deux intervalles de longueur $2\sqrt{a^2+b^2}$ qui est le double de la distance entre deux points entiers consécutifs de Δ ou Δ'. Donc chacun de ces deux intervalles contient un point entier. D'où contradiction et R est bien inclus dans la bande et donc son aire est inférieure à $2\sqrt{a^2+b^2}$ multiplié par la largeur de la bande $2\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}$ c.a.d. 4. [en fait cette aire est égale à 4 d'après la proposition ci-dessus]



III. Preuve du théorème A. On va utiliser le théorème suivant (déjà annoncé en I.)

Théorème C: *Il n'existe pas de bande infinie d'axe médian passant par O sans point entier intérieur excepté O.*
La démonstration de ce théorème est repoussée en IV.
Soit donc un rectangle R centré en O ne contenant en son intérieur pas d'autre point entier que l'origine. S'il ne possède pas de point entier sur une paire de cotés opposés, on peut agrandir R en écartant symétriquement ces deux cotés jusqu'à "toucher" un point entier (en fait deux opposés par symétrie centrale de la situation). En effet si le processus ne s'arrétait pas on obtiendrait une bande infinie sans point entier intérieur (sauf O). On fait de même pour les deux autres cotés. On peut donc supposer que R est bordé sur chaque paire de cotés opposés par au moins une paire de deux points entiers (symétriques). Voir la figure ci-dessous :

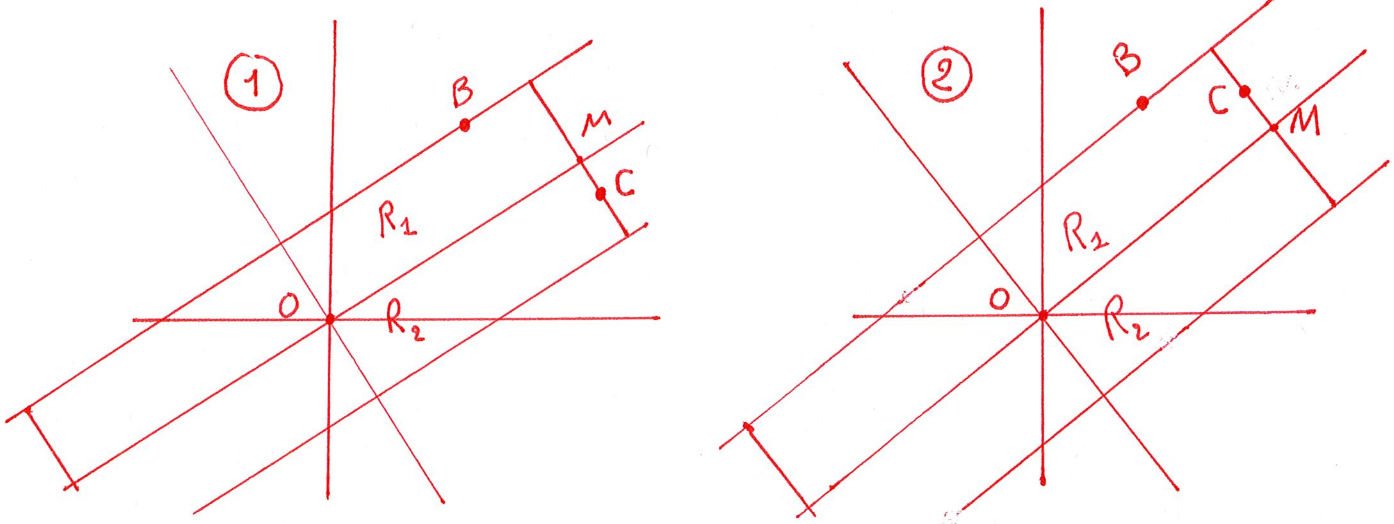


La situation n'est pas très différente du cas précédent (plus symétrique ...) mais pour majorer l'aire de R nous aurons besoin de deux résultats :
Proposition 1: *L'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ du plan $\mathbb{R}^2$ est égale (en valeur absolue) à* $\det(\vec{U}, \vec{V})$.
Preuve : On peut le montrer directement par "découpage" ou encore se ramèner par une rotation (qui ne change pas le déterminant) au cas où $\vec{U}$ est horizontal et dans cette situation la vérification est très simple...
Proposition 2: *Soient deux vecteurs entiers $\vec{U}$ et $\vec{V}$ du plan $\mathbb{R}^2$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
a) Le parallélogramme construit sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ne contient pas de point entier intérieur ni sur les cotés. (ce dernier point signifie que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont visibles)
b) $|\det(\vec{U}, \vec{V})| = 1$.
c) $(\vec{U}, \vec{V})$ est une base de $\mathbb{Z}^2$ (considéré comme groupe abélien).

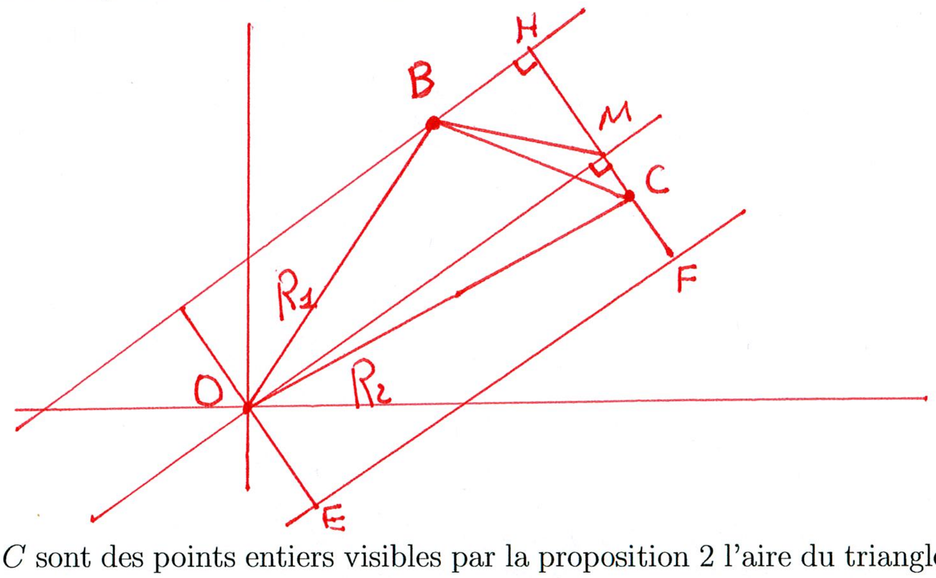
Preuve : on va prouver (rapidement...) que b) $\Longrightarrow$ a) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ b)
b)$\Longrightarrow$ a) : par contraposé : si l'on a un point entier intérieur au parallélogramme construit sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$ on obtient un nouveau parallélogramme d'aire plus petite entière et non nulle d'où l'aire du premier parallélogramme est strictement supérieure à 1.
a)$\Longrightarrow$ c) : le pavage du plan défini par le parallélogramme engendré par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ aura pour sommets *tous* les points entiers. Donc le groupe abélien engendré par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est égal à $\mathbb{Z}^2$.

c)$\Longrightarrow$ b) : en effet la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ est alors inversible dans $\mathbb{Z}$ donc le déterminant est égal à 1 (au signe près).

Revenons à notre rectangle R; deux cas se présentent (à symétrie près) pour les points entiers sur le bord de R:



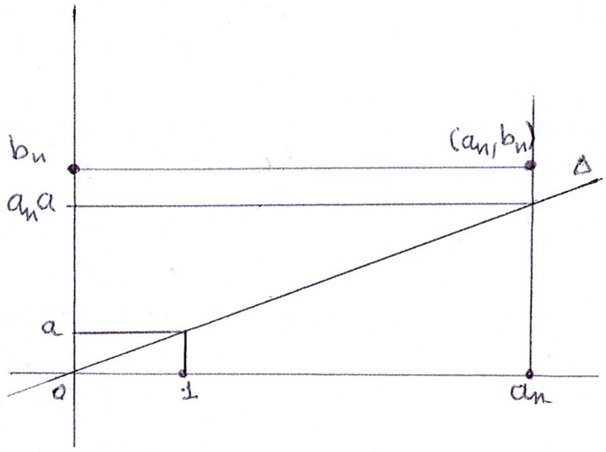
Dans les deux cas l'aire du rectangle R_1 est égale à deux fois celle du triangle OBM.
Dans le premier cas celle ci est inférieure à celle du triangle OBC : en effet (voir figure ci-dessous) cela revient à montrer que l'aire du triangle OMC est supérieure à celle du triangle BMC. Ce qui est vrai car ces deux triangles ont une même base et il suffit de comparer les deux hauteurs correspondantes OM et BH.

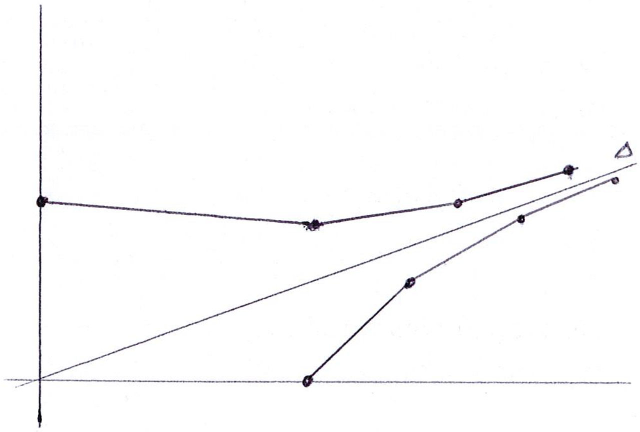


Comme B et C sont des points entiers visibles par la proposition 2 l'aire du triangle OBC sans point entier intérieur est égale à 1/2 d'où celle de R_1 est inférieure à 1 et donc celle de R à 4.
Dans le deuxième cas s'il n'y a pas de point entier sur EF on peut agrandir R_2 en poussant vers le bas EF jusqu'à toucher un point entier. On est alors ramené au cas précédent....
Le théorème A est alors prouvé modulo la preuve ci-dessous du théorème C :

IV.Preuve du théorème C: Elle est basée sur le développement des réels en fractions continues.

Soit donc une bande B d'axe médian Δ passant par O et de largeur r. On suppose que la pente de Δ est strictement positive. Si la pente a est rationnelle alors Δ contient une infinité de points entiers. Si elle est irrationelle Δ ne contient aucun point entier autre que O.
Supposons donc que a est irrationnel et soit alors (a_n/b_n) la suite des approximations rationnelles de $1/a$ données par le développement en fractions continues de $1/a$. On sait que (a_n) et (b_n) tendent vers l'infini et que $|a_n/b_n - 1/a| \leq 1/b_n^2$.
On en déduit : $|a_n a - b_n| \leq a/b_n$. Soit maintenant $\epsilon > 0$ positif donné inférieur à $r/2$, pour n assez grand on aura $a/b_n \leq \epsilon$. Ce qui signifie (voir figure ci-dessous) que l'on a trouvé un point entier (a_n, b_n) à une distance inférieure à $r/2$ du point $(a_n, a_n a)$ (qui appartient à Δ). D'où B contient un point entier et le théorème C est démontré... Remarque : les points (a_n, b_n) qui alternent autour de Δ dessine un "entonnoir" appelé *entonnoir de Klein* sans points entiers qui se "resserre" progressivement autour de Δ...





V. Conclusion. Le théorème A est un cas particulier d'un théorème célèbre de Hermann Minkowski qui affirme que l'inégalité du théorème A est encore vrai plus généralement pour les parties convexes symétriques par rapport à l'origine (c.a.d. les boules unités pour les normes sur $\mathbb{R}^2$ pas forcément euclidiennes). On a aussi une généralisation pour un réseau quelconque dans $\mathbb{R}^n$. C'est un théorème qui a de nombreuses conséquences en théorie algébrique des nombres. C'est justement ce lien entre objets de nature géométrique et d'autres de nature arithmétique que l'on retrouve dans la démonstration élémentaire donnée ci-dessus : la géométrie éclairant sous un jour plus visuel des questions de théorie des nombres comme Bézout ou l'approximation rationnelle des réels comme la théorie de fractions continues.
Pour aller plus loin sur le théorème de Minkoswki vous pouvez utilement consulter Wikipedia.
Pour ses applications en théorie algébrique des nombres voir aussi : Samuel : "théorie algébrique de nombres"
Pour les fractions continues et l'entonnoir de Klein :
Quadrature. Num. 48. p. 10-18. Enveloppe convexe des points situés à l'intérieur d'un convexe.
ou encore :
http://www.lsv.ens-cachan.fr/ picaro/COURS/OPTIONC/TEXTES/convexe$_i$*nterieur.pdf*

Notions mathématiques et compétences travaillées lors de la recherche de « Le champ et l'éolienne »

Travail sur les unités de mesures (d'aires et de longueurs)

Le repérage (coordonnées, quadrillage)

Les échelles

Les aires (découpages, calculs)

Les périmètres

Les symétries

Les quadrilatères (constructions, un carré est un rectangle)

Le théorème de Pythagore

Les fonctions affines

Les racines carrées

Chercher un problème d'optimisation, c'est-à-dire trouver une solution valide et montrer qu'elle est meilleure que toute autre solution

Le codage

Trouver un contre-exemple pour invalider une conjecture

Démarche expérimentale

Trier l'information utile

Réduire un problème à des cas particuliers plus simples pour s'approprier le problème

Schématisation, mathématisation, modélisation

Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

Organiser la recherche

La prise d'initiative (choix des exemples)