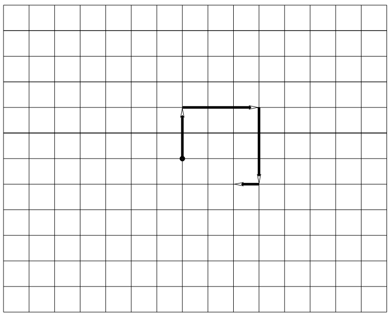
IREM 2013-2014
Résolution de problèmes
Étienne Mann
etienne.mann@univ-montp2.fr

Fuite à Fukushima

Je tiens tout d'abord à vous remercier d'avoir posé ce problème à vos classes. Félicitez vos élèves pour leur recherche et donnez leur rendez-vous l'année prochaine ! J'étais très content d'entendre que certains élèves ont très bien accroché au problème et qu'ils se sont passionnés pour les fuites :)
Ce problème est issus des « marches aléatoires ». Une recherche sur internet (wikipedia par exemple) vous donnera plus d'informations sur ce sujet.
Ce petit texte est inspiré par le chapitre 12 du livre qu'on peut trouver sur internet à l'adresse suivante.
http ://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf

1. Remarques préliminaires

- Nous ferons abstraction de la taille de la pièce et nous supposerons qu'elle est de taille très très grande c'est-à-dire de taille infinie.
- Pour aider à bien mathématiser le problème, nous utiliserons les coordonnées du plan abscisse et ordonnée. Le point de départ du robot sera le point $(0,0)$.
- Nous noterons $V+$ (resp. $V-$) pour un déplacement vers le haut (resp. le bas) et $H+$ (resp. $H-$) pour un déplacement vers la droite (resp. la gauche) [1]. Ainsi le chemin noté
$$(V+,V+,H+,H+,H+,V-,V-,V-,H-)$$
correspond au chemin de la figure ci-dessous.



2. Quelques exemples

Pour 1, 2 et 3 déplacements. Nous obtenons les configurations possibles que nous noterons $C(1), C(2)$ et $C(3)$. Les chiffres dans les tableaux $C(1), C(2), C(3)$ ci-dessous signifient le nombre de chemin qui relie l'origine au point en le nombre fixé de déplacements. Par exemple, le nombre 4 dans la configuration $C(2)$ signifie qu'il y a 4 chemins qui relient le point de départ à lui-même. Ces 4 chemins sont
$$(V+,V-),(H+,H-),(V-,V+),(H-,H+)$$
Autre exemple, le nombre 9 dans la configuration $C(3)$ signifie qu'il y a 9 chemins qui relient l'origine au point de coordonnées $(1,0)$: ces 9 chemins sont
$$(V+,V-,H+),(H+,H-,H+),(V-,V+,H+),(H-,H+,H+),(V+,H+,V-),$$
$$(H+,V+,V-),(V-,H+,V+),(H+,V-,V+),(V+,V+,V-).$$

$$C(1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\; C(2)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&2&0&2&0\\1&0&4&0&1\\0&2&0&2&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\; C(3)=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&3&0&3&0&0\\0&3&0&9&0&3&0\\1&0&9&0&9&0&1\\0&3&0&9&0&3&0\\0&0&3&0&3&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

1. V pour verticale et H pour horizontale.

3. Où le robot peut finir son trajet ?

Avec les exemples précédents du §2, nous remarquons que les points accessibles sont symétriques et dépendent de la parité.

Proposition 3.1. *Soit n un nombre de déplacements fixés. Un point (a,b) est un terminus possible en n déplacements si et seulement si $|a|+|b| \leq n$ et $|a|+|b|$ a la même parité que n.*

Démonstration. Remarquons que deux nombres u, v ont la même parité si et seulement si $u+v$ est paire. Par symétrie, on peut supposer que $a, b \geq 0$. Montrons que si (a,b) est un terminus en n étapes alors $a+b \leq n$ et $n-a-b$ est paire. Un chemin est une suite de $V+, V-, H+, H-$. Pour arriver au point (a,b) en n étapes, le chemin doit vérifier les conditions suivantes

$$\begin{aligned} b &= \text{(nombre de V+) - (nombre de V-)} \\ a &= \text{(nombre de H+) - (nombre de H-)} \\ n &= \text{(nombre de H+) + (nombre de H-)+(nombre de V+) +(nombre de V-)} \end{aligned}$$

Ainsi $n-a-b = 2$(nombre de V-) +2(nombre de H-), c'est-à-dire que n et $a+b$ ont même parité. Nous voyons aussi que $a+b \leq n$.
Réciproquement, montrons que si $a+b \leq n$ et $n-a-b$ est paire alors nous pouvons atteindre le point (a,b) en n étapes. Tout d'abord nous allons directement en (a,b) en faisant a fois $H+$ et b fois $V+$. Il nous reste alors $n-a-b$ étapes c'est-à-dire un nombre paire, disons $2k$, d'étapes. Nous faisons alors k fois le chemin $(V+, V-)$. □

Nous en déduisons le corollaire suivant qui répond à la question : quels sont les joints qu'il est possible de nettoyer ?

Corollaire 3.2. *Les joints qu'il est possible de nettoyer sont les joints à l'intérieur du carré de sommets*

$$(n,0),(-n,0),(0,n),(0,-n)$$

4. Pour chaque terminus, combien y a-t-il de chemins possibles ?

Fixons n déplacements et supposons que nous connaissons le nombre de chemin possible pour aller de $(0,0)$ à tous les points (a,b) c'est-à-dire que nous connaissons le tableau $C(n)$.
Nous nous demandons alors combien de chemins y a-t-il pour aller de $(0,0)$ à un point fixé (a,b) en $n+1$ déplacements c'est-à-dire comme trouver $C(n+1)$?
Pour arriver en (a,b) en $n+1$ déplacements, il faut être à une distance de 10cm en n déplacements c'est-à-dire en n déplacements être sur un des quatre points suivants : $(a-1,b),(a,b-1),(a+1,b),(a,b+1)$. Ainsi le nombre de chemin cherché en $n+1$ déplacements est la somme des 4 nombres en n déplacements qui relie $(0,0)$ à $(a-1,b),(a,b-1),(a+1,b),(a,b+1)$.
Plus mathématiquement, notons $N_{(a,b)}(n)$ le nombre de chemin qui relie $(0,0)$ à (a,b) en n déplacements alors nous avons démontré la proposition suivante

Proposition 4.1.

$$N_{(a,b)}(n+1) = N_{(a-1,b)}(n) + N_{(a,b-1)}(n) + N_{(a+1,b)}(n) + N_{(a,b+1)}(n)$$

Remarque 4.2. Pour passer de n à $n+1$ déplacements, nous sommons tous les nombres de $C(n)$ qui sont reliés à notre case par un joint. Nous obtenons alors la configuration $C(n+1)$.

En travaillant de proche en proche, nous construisons des configurations pour des nombres de pas plus grands.

$$C(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 16 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 24 & 0 & 24 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 16 & 0 & 36 & 0 & 16 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 24 & 0 & 24 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 16 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(5)=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&5&0&5&0&0&0&0\\ 0&0&0&10&0&25&0&10&0&0&0\\ 0&0&10&0&50&0&50&0&10&0&0\\ 0&5&0&50&0&100&0&50&0&5&0\\ 1&0&25&0&100&0&100&0&25&0&1\\ 0&5&0&50&0&100&0&50&0&5&0\\ 0&0&10&0&50&0&50&0&10&0&0\\ 0&0&0&10&0&25&0&10&0&0&0\\ 0&0&0&0&5&0&5&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

On voit aussi apparaître des carrées 16, 25 dans les tableaux. Ceci se généralise facilement pour $C(n)$ par la formule

$$(n+1)^2 = n^2+n+n+1$$

5. Quelle est la probabilité de retour en $(0,0)$?

Cette question est la plus compliquée et certains résultats dépassent le programme de terminale. Pour avoir un chemin qui revienne à l'origine, il faut que le nombre de déplacements soit paire. Notons $2n$ ce nombre de déplacements fixés.

Résultats admis 5.1. Dans la suite, nous aurons besoin des résultats admis suivants.

(1) Le nombre de choix possibles pour choisir k éléments dans un ensemble à n éléments est $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ où $k! = k.(k-1)...2.1$.

(2) Nous dirons que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont *équivalentes* si $\lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 1$. Nous noterons $u_n \sim v_n$. Dans ce cas, nous avons $\sum_{n\geq 0} u_n = +\infty$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0} v_n = +\infty$.

(3) Nous avons $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n} = +\infty$.

Dans la suite nous considérons deux probabilités

(1) $u(2n)$: nombre de chemin qui reviennent à l'origine en $2n$ déplacements

(2) $f(2n)$: nombre de chemin qui reviennent **la première fois** à l'origine en $2n$ déplacements

La question revient à calculer la probabilité suivante

$$\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k\geq 1} f(2k) := \frac{1}{4^{2n}}(f(2)+f(4)+f(6)+\cdots) \tag{1}$$

Lemma 5.2. *Nous avons la relation suivante*

$$u(2n) = f(2)u(2n-2) + f(4)u(2n-4)+\cdots+f(2n)$$

Remarque 5.3. Nous pouvons illustrer ce lemme pour $u(4) = u(2)f(2)+f(4)$. Un dénombrement à la main montre que $u(2) = f(2) = 4$ et $f(4) = 20$. Nous obtenons bien $u(4) = 36$ comme dans la configuration $C(4)$.

Démonstration. Si nous revenons en $2n$ déplacements, nous pouvons avoir un premier retour en 2 étapes, 4 étapes, 6 étapes,... Si notre premier retour est en 2 étapes, alors nous pouvons compléter ce chemin par un retour en $2n-2$ étapes. Nous obtenons alors le premier terme de la somme. Pour les autres nous raisonnons de la même façon. □

Lemma 5.4. *Nous avons*

$$u(2n) = \left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^2$$

chemin qui reviennent à l'origine en $2n$ déplacements.

Remarque 5.5. Nous avons $u(2) = 4$, $u(4) = 36$, $u(6) = 400$, $u(8) = 4900$. Les trois premières valeurs se voit sur $C(2), C(4)$ et $C(6)$.

Démonstration du Lemme 5.4. Un chemin est codé par une suite de $V+, V-, H+, H-$. Dire qu'il revient à l'origine signifie que nous avons que le nombre de $V+$ (resp. $H+$) est égal au nombre de $V-$ (resp. $H-$). Nous avons donc un nombre paire de déplacements verticaux et horizontaux.

Dans un premier temps cherchons combien y a-t-il de chemin avec $2k$ déplacements verticaux ? On doit choisir $2k$ places parmi les $2n$ du chemin pour y mettre des V c'est-à-dire $\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}$ possibilités (voir résultats admis 5.1). Ainsi nous avons mis les V et les H dans les places qui restent dans notre liste. Maintenant il faut mettre les $+$ et $-$. Comme nous avons autant de $V+$ que de $V-$, nous devons choisir k places parmi $2k$ pour mettre les $+$ càd $\frac{(2k)!}{k!k!}$ possibilités. Pour les $H+$ et $H-$, nous obtenons $\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}$. Ainsi pour k déplacements verticaux nous avons un nombre de possibilités de

$$\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}\frac{(2k)!}{k!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!} = \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}.$$

Au total nous sommons sur k et nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}$$

Un calcul un peu compliqué montre que cette somme vaut exactement

$$\left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^2$$

□

Théorème 5.6. *Nous avons que $\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k\geq 1} f(2k) = 1$ c'est-à-dire que nous sommes sûr de revenir au départ.*

Démonstration. Posons

$$U(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{u(2n)}{4^{2n}} x^{2n}$$

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f(2n)}{4^{2n}} x^{2n}$$

où $u(0) = 1$ et $f(0) = 0$. Le lemme 5.2 implique l'égalité

$$U(x)F(x) = U(x) - 1$$

Le 1 dans le membre de droite vient du terme constant du produit qui est nul. Ainsi

$$F = \frac{U-1}{U}$$

Remarquons que nous cherchons à calculer $F(1)$ (cf. égalité (1))
Pour cela nous calculons

$$\frac{U(1)-1}{U(1)}$$

A l'aide du Lemme 5.4, nous en déduisons que

$$U(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^{2n}} \left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^2$$

La formule de stirling nous dit que

$$n! \sim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ainsi nous obtenons que

$$\frac{1}{4^{2n}}\left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

Les résultats admis 5.1 impliquent que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ tend vers l'infini et donc la limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{U(x)-1}{U(x)} = \lim_{x\to 1} 1 - \frac{1}{U(x)} = 1$$

□

Conclusion : Nous sommes sûr de revenir au point de départ. Par contre, si nous avons le même genre de problème en dimension 3, nous ne sommes plus certain de revenir au départ !