

Les fractions égyptiennes

Pouvez-vous trouver deux entiers naturels a et b distincts tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?

Pouvez-vous trouver trois entiers naturels a , b et c distincts tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

Pouvez-vous trouver quatre entiers naturels a , b , c et d distincts tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

etc...

Expliquer la démarche !!

Bilan: voici la liste des réponses et hypothèses de la classe.

$$x \rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{9898989898} = 1$$

$\rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{0}$: la calculatrice dit que c'est incorrect

\rightarrow la seule solution pour deux fractions serait $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ si on prend pas deux dénominateurs égaux, le résultat $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ est inférieur à 1.

\rightarrow Pour 3 fractions:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{un schéma a été proposé par un groupe}$$

car $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

\rightarrow Pour 4 fractions:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

\rightarrow un groupe a émis la conjecture: "on ne peut trouver une solution que pour un nombre impair des fractions"

$$x \rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{9898989898} = 1$$

Dans ce cas, la calculatrice a fait un arrondi. En effet, $\frac{1}{1} = 1$ donc quand on ajoute

$\frac{1}{9898989898}$, qui est un nombre positif, on devrait avoir un résultat supérieur à 1

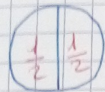
$\rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{0} = 1$ la calculatrice dit que c'est incorrect les groupes qui ont proposé ce résultat pensaient que $\frac{1}{1} = 1$ et $\frac{1}{0} = 0$

Rappel: une fraction est l'écriture d'un quotient donc $\frac{1}{0} = 1 \div 0$.

Or, on ne peut pas diviser par 0! C'est pourquoi ce résultat est faux et la

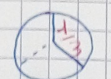
calculatrice dit que c'est incorrect. $\frac{1}{6}$ n'existe pas!!!

→ Pour la première question, la seule solution est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Si on prend deux dénominateurs différents, le résultat est toujours inférieur à 1.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Cette solution ne répond pas au problème car les dénominateurs sont égaux.



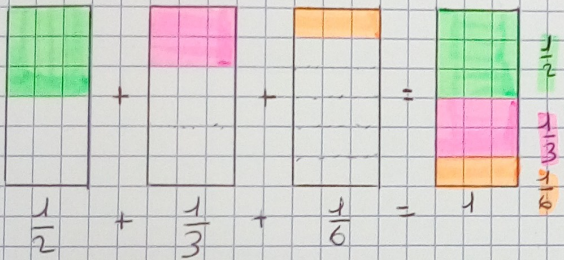
Plus on augmente le dénominateur, plus les parts sont petites.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < 1$$

On ne peut pas former une unité en ajoutant deux fractions égyptiennes de dénominateurs différents.

On ne peut pas trouver de réponse à la première question.

→ Pour trois fractions, la classe a proposé la solution: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$



Conclusion: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ est la solution à la 2^{ème} question.

On cherche maintenant une solution pour additionner directement

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ sans passer par le schéma

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{6}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Précision: Pour additionner des fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur.

$$\begin{aligned} \text{Exemple: } \frac{2}{3} + \frac{5}{6} &= \frac{7+10}{12} = \frac{17}{12} \\ &= \frac{2 \times 2 + 5}{3 \times 2} = \frac{10}{6} \\ &= \frac{4+5}{6} = \frac{9}{6} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{7}{12} + \frac{10}{6} &= \frac{7+20}{12} = \frac{27}{12} \\ &= \frac{7+10 \times 2}{12} = \frac{27}{12} \\ &= \frac{7}{12} + \frac{20}{12} \\ &= \frac{27}{12} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{4}{3} + \frac{2}{21} + \frac{1}{7} &= \frac{4 \times 7 + 2 + 1 \times 3}{3 \times 7} = \frac{28+2+3}{21} \\ &= \frac{33}{21} \\ &= \frac{11}{7} \end{aligned}$$

→ Pour la 3^{ème} question: $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$

On vérifie par le calcul: $\frac{1}{12} + \frac{1 \times 2}{6 \times 2} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} + \frac{1 \times 6}{2 \times 6} \rightarrow \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{6}{12} \rightarrow \frac{12}{12} = 1$

Conclusion: cette réponse est correcte.

Remarque: On aurait pu vouloir vérifier les résultats en utilisant les nombres décimaux. Problème: certaines fractions n'ont pas de valeur décimale!

Exemple: $\frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$ Mais $\frac{1}{6} = 0,166666666667$

Exercise 18 p 28

a. $\frac{2}{3} = \frac{18}{27}$
 $\times 9$

b. $\frac{11}{8} = \frac{55}{40}$
 $\times 5$

c. $\frac{4}{7} = \frac{24}{42}$
 $\times 6$

d. $\frac{9}{10} = \frac{81}{90}$
 $\times 9$

Exercise 19 p 28

a. $\frac{-6}{1} = \frac{-24}{4}$
 $\times 4$

b. $\frac{3}{-5} = \frac{-9}{15}$
 $\times 3$

c. $\frac{-1}{9} = \frac{-7}{63}$
 $\times 7$

d. $\frac{-14}{-13} = \frac{7}{65}$
 $\times (-5)$

Exercise 42 p 30

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

b. $\frac{5}{6} + \frac{5}{12}$

c. $\frac{13}{14} + \frac{5}{7}$

d. $\frac{3}{4} + \frac{5}{24}$

e. $\frac{6}{7} + \frac{2}{35}$

f. $\frac{11}{81} + \frac{1}{9}$

$\frac{1 \times 2}{2 \times 2} + \frac{1}{4}$

$\frac{5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{5}{12}$

$\frac{13}{14} + \frac{5 \times 2}{7 \times 2}$

$\frac{3 \times 6}{4 \times 6} + \frac{5}{24}$

$\frac{6 \times 5}{7 \times 5} + \frac{2}{35}$

$\frac{11}{81} + \frac{1 \times 9}{9 \times 9}$

$\frac{2}{4} + \frac{1}{4}$

$\frac{10}{12} + \frac{5}{12}$

$\frac{13}{14} + \frac{10}{14}$

$\frac{18}{24} + \frac{5}{24}$

$\frac{30}{35} + \frac{2}{35}$

$\frac{11}{81} + \frac{9}{81}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{15}{12}$

$\frac{23}{14}$

$\frac{23}{24}$

$\frac{32}{35}$

$\frac{20}{81}$

Exercice 46 p 30

a. $\frac{3}{4} - \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ d. $\frac{5 \times 3}{6 \times 8} = \frac{3}{48} - \frac{10}{48} = \frac{37}{48}$
e. $\frac{3 \times 1}{2 \times 25} = \frac{1}{25} - \frac{15}{25} = \frac{14}{25}$ g. $\frac{9 \times 20}{7 \times 21} = \frac{20}{21} - \frac{27}{21} = \frac{7}{21}$

Exercice 48 p 30

a. $\frac{4 \times 3}{1 \times 2} = \frac{8}{2} + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$ d. $\frac{16}{3} + \frac{3 \times 5}{1 \times 5} = \frac{16}{3} + \frac{15}{3} = \frac{31}{3}$

Exercice 49 p 30

a. $\frac{9}{4} - \frac{2 \times 4}{1 \times 4} = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$ b. $\frac{11}{11} - \frac{12 \times 11}{1 \times 11} = \frac{11}{11} - \frac{11}{11} = \frac{3}{11}$ d. $\frac{3 \times 9}{1 \times 3} = \frac{15}{3} - \frac{9}{3} = \frac{6}{3}$

Exercice 21 p 28

a. $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ b. $\frac{90}{60} = \frac{3}{2}$ c. $\frac{63}{81} = \frac{7}{9}$ d. $\frac{132}{164} = \frac{11}{12}$

Exercice 50 p 31

a. $\frac{9}{7} + \frac{8}{7} = \frac{17}{7}$ b. $\frac{14}{15} + \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{23}{15}$ c. $\frac{3 \times 5}{4 \times 24} = \frac{23}{24}$ d. $\frac{9}{7} - \frac{8}{7} = \frac{1}{7}$
e. $\frac{5 \times 2}{8 \times 40} = \frac{3}{40}$ g. $\frac{14}{4} - \frac{5 \times 2}{2 \times 4} = 1$

Exercice 47 p 30

a. Elise = $\frac{3}{8}$ Jimmy = $\frac{1 \times 2}{4 \times 8} = \frac{2}{8}$ Tous les deux ils ont mangé $\frac{5}{8}$ du gâteau.
 $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$
b. il pose $\frac{3}{8}$ du gâteau $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$