Problème

Le nombre de zéros de la factorielle

Durée estimée : 9 heures

Connaissances et compétences attendues en lien avec le programme :

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	
• Multiples et diviseurs • Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 • Division euclidienne (quotient, reste)	• Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier • Utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10 • Déterminer les diviseurs d'un nombre à la main, à l'aide d'un tableur, d'une calculatrice. • Modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité (engrenages, conjonction de phénomènes, etc.)

Compétences mathématiques principalement mobilisées :

Chercher	• S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture. • Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. • Décomposer un problème en sous-problèmes.
Raisonner	• Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui. • Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion. • Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.
[Calculer]	*[Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel).]*
Communiquer	Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Contenu :

Doc 1 -

Thème : Analyse de la situation

Enoncé du problème :

En mathématique, la **factorielle** d'un nombre entier est le produit des nombres entiers (supérieurs à 1) qui le précèdent.

Par exemple :

- Factorielle 3 s'écrit 1 x 2 x 3 et est égale à 6
- Factorielle 4 s'écrit 1 x 2 x 3 x 4 et est égale à 24
- Factorielle 5 s'écrit 1 x 2 x 3 x 4 x 5 et est égale à 120

On remarque qu'il y a un « 0 » à la fin de Factorielle 5.

1) Combien y aura-t-il de « 0 » à la fin de Factorielle 7 ?

2) Combien y aura-t-il de « 0 » à la fin de Factorielle 17 ?

3) Et si on se posait la question pour n'importe quel nombre entier, comment pourrait-on faire pour trouver le nombre de « 0 » à la fin ?

Remarque : cet énoncé diffère un peu de la version originale pour s'adapter à la tranche d'âge. (voir l'énoncé ici : indiquer le lien)

Solution mathématique

Voir le document « AnalyseMaths_Factoriel.pdf » sur le site DREAMaths (www.dreamaths.univ-lyon1.fr)

Les mathématiques en jeu

- écriture scientifique, écriture arrondie
- lien entre écriture décimale et décomposition en facteurs
- divisibilité par 2, par 5
- technique de dénombrement
- récursivité
- représentation de fonctions discontinues, de suites, de courbes sur la calculatrice - écriture dans une autre base que 10, base cinq ici
- usage du symbole Sigma
- utilisation de différentes calculatrices
- utilisation du calcul formel avec calculatrice ou logiciel

Analyse des connaissances, méthodes et procédures possibles

Voir le document « AnalyseDidactique_Factoriel.pdf » sur le site DREAMaths
(www.dreamaths.univ-lyon1.fr)

Doc 2 -

Thème : Mise en œuvre de la situation

➡1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 20 min)

Temps de présentation des enjeux de la séance (5 min)

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves. Il faut préciser que ce problème est résistant, que les élèves peuvent tous commencer à chercher, faire quelques essais… L'utilisation de la calculatrice est évidemment autorisée.

Temps de familiarisation avec problème (10 min)

Présentation et lecture individuelle de l'énoncé. Premier temps de recherche individuel de 5 min. Puis relecture collective, explication du vocabulaire, peut-être même exemple avec la réponse de factoriel 7.

Temps de recherche individuelle approfondi (5 min)

Appropriation et approfondissement du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

➡ 2ème phase : recherche en groupe (entre 30 min et 1 heure)

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourages à formuler des conjectures, trouver des éléments de preuve, apporter des justifications etc.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

➡ 3ème phase : mise en commun et débat (au moins 30 min)

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

➡ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 10 min)

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les points techniques évoqués par les élèves
- les raisonnements et méthodes utilisés
- les savoirs mathématiques utilisés

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. **A écrire en rouge dans le cahier d'exercice**.

Il faut compter au moins 2 heures pour une mise oeuvre complète

Remarque : Il se peut que le problème n'ait pas été résolu. Ce n'est pas grave, la résolution complète se fera au travers des études proposées.

Thème : Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

<u>Bilan de la recherche : ce qui peut apparaitre</u>

- Factorielle 7 = 5040 . Il y a un "0"

- On ne peut pas calculer plus que factorielle 13 avec la calculatrice (pour factorielle 17 elle affiche 3.556874281 x 10^(14) ...)

Les pistes pour calculer factorielle 17 :

1) Calculer factorielle 10 et factorielle 7 et ajouter les deux résultats

2) Décomposer le produit en deux sous-produits « calculable » avec la calculatrice

Les conjectures pour trouver le nombre de zéros :

- Comme factorielle 13 a deux zéros, factorielle 17 a au moins deux zéros aussi

- Le nombre de zéro augmente tous les multiples de 5

Proposition d'études pour poursuivre la recherche du problème

I. <u>Vérification des conjectures et méthodes proposées</u>

Beaucoup d'élèves vont tenter de calculer explicitement factorielle 17 en utilisant des techniques liées notamment à la proportionnalités (ex: 17! = 10! + 7!). Il faudra invalider ces méthodes à l'aide de contre-exemples numériques convaincants (et vérifiable à la calculatrice). En ce qui concerne les conjectures sur l'évolution du nombre de 0, on peut vérifier à l'aide d'un tableur les résultats exacts jusqu'à 17!.

II. <u>Solution du problème</u>

Pour permettre aux élèves de comprendre l'évolution du nombre de zéros, il faut leur mettre sous les yeux des exemples nombreux (au moins la factorielle des 30 premiers nombres entiers). La justification du nombre de zéros se fera après discussion des points suivants :

- Quelle est la signification d'un « 0 » à la fin d'un nombre entier ? Multiple de 10
- Comment faire apparaitre un 10 avec des multiplications ?

On pourra proposer plusieurs exercices consistant à déterminer, sans l'effectuer, le nombre de zéros à la fin d'un produit.

III. <u>Recherche de multiples et de diviseurs</u>

Si ce n'est as déjà fait auparavant, il faudra redéfinir les notions suivantes : multiples et diviseurs. On pourra également parler des critères de divisibilité pour 2, 3, 5 et 9 et revenir que la division euclidienne.

Doc 4 -

Thème : Ressources en arithmétique

Les critères de divisibilité

Après avoir revu en classe les différents critères de divisibilité pour 2, 3, 5 et 9, proposer les labyrinthes pour 3, 5 et 9 (on va considérer que ce n'est pas nécessaire de revoir celui pour 2).

Voir fichier « Doc4_Labyrinthe_5e.pdf »

Rullo produit

https://mathix.org/rullo_produit/ ou le lien minimisé http://urlz.fr/7HKp

Cette application fonctionne sur tablette. Il suffit d'indiquer l'URL aux élèves et de les laisser « jouer ».

Consignes à donner :

Faire un ou deux essais en niveau 1 ou 2 pour comprendre le principe du jeu puis s'entrainer aux niveau 3 et 4.

Les engrenages

Voici deux situations d'engrenages simples pour comprendre leur fonctionnement.

Source : http://cache.media.education.gouv.fr/file/Arithmetique/64/7/RA16_C4_MATH_arithm_ca_roule_547647.pdf

Engrenage n°1 :

Lien de la vidéo : http://videos.education.fr/MENESR/eduscol.education.fr/2016/Ressources2016/Math/arithmetique-initiative-ca-roule-video1.mp4 ou le lien minimisé http://urlz.fr/7HKr

Il s'agit d'une roue à 8 dents qui entraine une roue à 6 dents. La question est la suivante : Combien de tours va faire la roue à 6 dents (violette) si la roue à 8 dents (orange) en fait 3 tours ?

On manipule ici les notions de multiples et diviseurs : 3*8=24 et est-ce que 24 est divisible par 6 ? Si oui, le quotient sera le nombre de tours. On peut aussi utiliser la proportionnalité.

Engrenage n°2 :

Lien de la vidéo : http://videos.education.fr/MENESR/eduscol.education.fr/2016/Ressources2016/Math/arithmetique-initiative-ca-roule-video3.mp4 ou le lien minimisé http://urlz.fr/7HKu

On dispose de 3 roue, une orange (8 dents), une bleue (10 roues) et une violette (6 roues) avec des pastilles qui permettent de repérer la position initiale d'alignement. Combien de tours doit faire au minimum la roue orange pour que les trois roues retrouvent leur position initiale ?

On manipule ici la notion de PPCM et de quotient. PPCM(8;10;6)=120. Il faudra donc 120 tours

Cette vidéo est plus complexe car le nombre de tours à trouver est élevé.