<u>Problème:</u> Le billard

Durée théorique : 11 heures

Connaissances et compétences attendues :

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	
• *Multiples et diviseurs* • *Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9* • *Division euclidienne (quotient, reste)* • Définition d'un nombre premier ; liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 • *Fractions irréductibles*	*Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier* Déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 *Utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10* Déterminer les diviseurs d'un nombre à la main, à l'aide d'un tableur, d'une calculatrice Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers (à la main ou à l'aide d'un logiciel) *Simplifier une fraction pour la rendre irréductible* Modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité (engrenages, conjonction de phénomènes, etc.)

Commentaires :

- Les éléments ci-dessus en italique ont déjà été travaillées en début de cycle.
- Les notions de PGCD et de PPCM seront peut-être abordées mais ce ne seront pas des connaissances exigibles.

Compétences mathématiques principalement mobilisées :

Chercher	• S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture. • Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. • Décomposer un problème en sous-problèmes.
Modéliser	• Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques)
Raisonner	• Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui. • Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion. • Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.
Communiquer	Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Contenu :

I. Analyse de la situation

II. Mise en oeuvre de la situation

III. Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

IV. Ressources en arithmétique

Doc 1 -

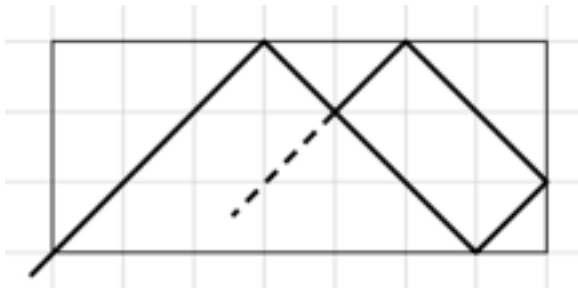
Thème : Analyse de la situation

Enoncé du problème :

On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).

Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple :



Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction du nombre de lignes et du nombre de colonnes ?

Solution mathématique

Voir le document « AnalyseMaths_billard.pdf » sur le site DREAMaths (www.dreamaths.univ-lyon1.fr)

Les mathématiques en jeu

- Notions de multiples et de diviseurs
- Notion de nombres premiers et de nombres premiers entre eux
- Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celles de la figure à obtenir
- Calculer le PGCD et le PPCM de deux nombres entiers
- Calcul littéral lors des conjectures et des preuves.

Analyse des connaissances, méthodes et procédures possibles

Voir le document « AnalyseDidactique_billard.pdf » sur le site DREAMaths (www.dreamaths.univ-lyon1.fr)

Doc 2 -

Thème : Mise en oeuvre de la situation

➡ 1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 15 min)

Temps de présentation des enjeux de la séance

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves.

Rechercher, émettre des conjectures, faire des essais (dessins), prendre des initiatives… Une place importante est accordée ici aux essais et à la recherche d'éventuels contre-exemples.

Temps de familiarisation avec problème (5 min)

Présentation du problème, lecture et relecture collective de l'énoncé, explication du vocabulaire.

Temps de recherche individuelle (10 min)

Appropriation du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

➡ 2ème phase : recherche en groupe (1h15)

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourage à multiplier les dessins en variant au maximum les nombres entiers, à formuler des conjectures, à apporter des justifications etc. Il faut laisser un certains aux élèves (au moins 45 min) pour qu'ils fassent leurs essais et qu'ils arrivent à formuler leurs conjectures.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun (30 min sont en générales nécessaires)

➡ 3ème phase : mise en commun et débat (au moins 30 min)

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

➡ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 15 min)

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les points techniques évoqués par les élèves
- les raisonnements et méthodes utilisés
- les savoirs mathématiques utilisés

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. **A écrire en rouge dans le cahier d'exercice**.

Il faut compter entre 2 et 3 heures pour une mise oeuvre complète

Remarque : Il est fort probable que le problème n'ait pas été résolu. Ce n'est pas grave, la résolution complète se fera au travers des études proposées.

Doc 3 -

Thème : Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

<u>Ce qui peut apparaitre dans le bilan de la recherche</u>

- multitude de conjectures vraies ou fausses (parmi les fausses, les plus aberrantes auront été éliminées lors du débat)
- Des cas particuliers qui vont être mis en évidence (tous les carreaux sont traversés, trajectoire en dents de scie…)
- un peu de vocabulaire (multiple, diviseur…)
- …

<u>Proposition de prolongements, appelés « études » pour travailler le programme à partir de ce bilan.</u>

Etude 1 - Vérification des conjectures émises

Travailler sur le statut de l'exemple et du contre-exemple (première étape dans la démarche de preuve). Recherche des conjectures fausses et des autres (qui semblent être vraies).

Etude 2 - Classification des différentes trajectoires possibles

Séparation en 3 cas:

- Cas n°1: Quand tous les carreaux sont traversés
- Cas n°2: Quand le rayon rebondit mais ne revient jamais en arrière
- Cas n°3: Quand le rayon revient en arrière mais que tous les carreaux ne sont pas traversés

Les cas n°1 et 2 sont souvent déjà cités dans les conjectures proposées. Le cas n°3 englobe les deux autres et sera la solution du problème.

Etude 3 - Solution du problème

On utilise les cas n°1 ou 2 pour démontrer le cas n°3. La démonstration utilisée se fait à partir d'un exemple générique. Ce type de preuve est à manipuler avec prudence avec les élèves (pour ne pas faire de raccourcis du type : exemples <=> preuves).

Pour renforcer la validité de ce résultat, on proposera en exercices de répondre au problème dans des cas précis pour entraîner les élèves à chercher le PGCD de deux nombres en décomposant en produit de nombres premiers (le jeu de Pénélope peut être proposé à cette occasion)

Etude 4 - Entrainement : résolution de problème en arithmétique.

Exercices d'applications (simplification de fractions, problèmes d'engrenage…), jeux ou problèmes de brevet. Voir le doc 4 « ressources en arithmétiques ».

Doc 4 -

Thème : Ressources en arithmétiques

Le jeu de Juniper-Green

Principe du jeu : Le jeu d'origine se joue à deux (voir la variante "défi" pour jouer seul ou en équipe), avec un plateau composé des 25, 50 ou 100 premiers nombres entiers et selon les règles suivantes :

- le premier joueur coche un nombre.
- chaque joueur coche un nombre parmi les multiples ou les diviseurs du nombre choisi par son adversaire au coup précédent.
- un joueur est déclaré gagnant si son adversaire ne peut plus jouer

Une quatrième règle souvent utilisé dit que le premier nombre choisi doit être pair (ou plus simplement, ne doit pas être premier). Elle est souvent utilisée, car le premier joueur pouvait facilement bloquer son adversaire en jouant un nombre N : nombre premier supérieur à Nmax/2, obligeant son adversaire à jouer 1, puis en rejouant un nombre premier supérieur à Nmax/2. Ainsi il était sur de gagner.

Les 3 grilles :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le défi : C'est une variante du jeu à deux (voir Bulletin vert de L'APMEP n°427). Le but n'est plus de bloquer un adversaire, mais d'arriver à cocher le plus possible de nombres sur le plateau. Un tableau situé en bas de cette page attend vos records.

Sources :

http://www.acamus.net/index.php?option=com_content&view=article&id=32:le-jeu-de-juniper-green&catid=41&Itemid=219

https://fr.wikipedia.org/wiki/Juniper_Green_(jeu)

Décomposer en facteurs premiers

On part d'un nombre, 24 par exemple, et on lui applique la règle suivante :

A chaque ligne, le **produit** doit contenir un facteur (différent de 1) de plus qu'à la ligne précédente.

Exemple :

24

$= 3 \times 8$

$= 3 \times 2 \times 4$

$= 3 \times 2 \times 2 \times 2$

Première phase :

L'enseignant écrit au tableau, devant les élèves et sans rien dire :

24

$= 3 \times 8$

$= 3 \times 2 \times 4$

$= 3 \times 2 \times 2 \times 2$

Il demande alors aux élèves de faire des hypothèses sur les règles qu'il a utilisées pour construire cette suite.

Les remarques des élèves permettent de préciser les règles du jeu qui sont alors écrites au tableau :

- On part d'un nombre et on lui applique la règle de transformation précédente.
- A chaque ligne, on a toujours une écriture du même nombre, le nombre de départ.
- Le nombre 1 ne figure pas.

Deuxième phase:

Comparaison de différentes décomposition.

La classe sera divisée en 4 partie, chaque partie se concentrant sur deux décompositions proposées autour du même nombre de départ.

Exemple :

72	72	72	72	72
$2 \times$ **36**	**3** $\times$ **24**	**4** $\times$ **18**	**6** $\times$ **12**	**8** $\times$ **9**

Chaque élève utilise successivement la règle à partir de la décomposition donnée.

Mise en commun:

Au tableau, les différentes décompositions sont proposées. Les conjectures:

- même nombre d'étapes à chaque fois.
- La dernière ligne est la même (<- liste des diviseurs premiers).

Bilan

- Nombre premier.
- Décomposition en produit de facteurs premier.
- Ecriture avec les puissances

Troisième phase: le plus grand diviseur commun

Exemple n°1

- Trouver la décomposition en produit de facteur premier des nombres 36 et 42.
- Quels sont les diviseurs communs à 36 et 42 ?
- Quel est le plus grand diviseur commun à 36 et 42 ?

36

= 2 x 18

= 2 x 2 x 9

= 2 x **2 x 3** x 3

42

= 7 x 6

= 7 x **2 x 3**

Les diviseurs premiers communs sont: 1, 2, 3 et 6.

Le plus grand diviseur commun est 6.

Exemple n°2

- Trouver la décomposition en produit de facteur premier des nombres 54 et 72.
- Quels sont les diviseurs communs à 54 et 72 ?
- Quel est le plus grand diviseur commun à 54 et 72 ?

54

= 6 x 9

= 2 x 3 x 9

= **2 x 3 x 3** x 3

72

= 8 x 9

= 2 x 4 x 9

= 2 x 2 x 2 x 9

= 2 x 2 x **2 x 3 x 3**

Les diviseurs communs sont: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Le plus grand diviseur commun est 18.

Bilan

Méthode pour calculer directement le PGCD de deux nombres entiers à l'aide de la décomposition en facteur premier (avec ou sans puissances)

Rullo produit

https://mathix.org/rullo_produit/ ou le lien minimisé http://urlz.fr/7HKp

Cette application fonctionne sur tablette. Il suffit d'indiquer l'URL aux élèves et de les laisser « jouer ».

Consignes à donner :

Faire un ou deux essais en niveau 1 ou 2 pour comprendre le principe du jeu puis s'entrainer aux niveau 3 et 4.

Les engrenages

Voici deux situations d'engrenages simples pour comprendre leur fonctionnement.

Source : http://cache.media.education.gouv.fr/file/Arithmetique/64/7/RA16_C4_MATH_arithm_ca_roule_547647.pdf

Engrenage n°1 :

Lien de la vidéo : http://videos.education.fr/MENESR/eduscol.education.fr/2016/Ressources2016/Math/arithmetique-initiative-ca-roule-video1.mp4 ou le lien minimisé http://urlz.fr/7HKr

Il s'agit d'une roue à 8 dents qui entraine une roue à 6 dents. La question est la suivante : Combien de tours va faire la roue à 6 dents (violette) si la roue à 8 dents (orange) en fait 3 tours ?

On manipule ici les notions de multiples et diviseurs : 3*8=24 et est-ce que 24 est divisible par 6 ? Si oui, le quotient sera le nombre de tours. On peut aussi utiliser la proportionnalité.

Engrenage n°2 :

Lien de la vidéo : http://videos.education.fr/MENESR/eduscol.education.fr/2016/Ressources2016/Math/arithmetique-initiative-ca-roule-video2.mp4

On dispose de 3 roues : une rouge (15 dents), une bleue (10 dents) et une violette (6 dents). On fait tourner la roue violette qui entraine la roue rouge par la gauche et la roue bleue par la droite. Combien de tours fait la roue bleue quand la roue rouge fait 15 tours ?

Si la roue rouge fait 15 tours cela revient à considérer une roue de 15*15=225 dents qui fait un tour. Comme 225÷10=22,5 , la roue bleue va faire 22 tours complets et un demi tour (le nombre de tours de la roue violette n'intervient pas ici).

Alternative : on pourrait poser la question « Si la roue rouge fait 15 tours, est-ce que les roues bleue et violette feront elle aussi un nombre entier de tours ? ».

La réponse est non car 225 n'est pas divisible par 6 et n'est pas divisible par 10.

Engrenage n°3 :

Lien de la vidéo : http://videos.education.fr/MENESR/eduscol.education.fr/2016/Ressources2016/Math/arithmetique-initiative-ca-roule-video3.mp4 ou le lien minimisé http://urlz.fr/7HKu

On dispose de 3 roues, une orange (8 dents), une bleue (10 roues) et une violette (6 roues) avec des pastilles qui permettent de repérer la position initiale d'alignement. Combien de tours doit faire au minimum la roue orange pour que les trois roues retrouvent leur position initiale ?

On manipule ici la notion de PPCM et de quotient. PPCM(8;10;6)=120. Puis 120÷8=15 ; 120÷10=12 et 120÷6=20. Il faudra donc que la roue orange fasse 15 tours pour que la roue bleue en fasse 12 et que la violette en fasse 20 avant de toutes revenir dans leur position initiale.

Ressources classiques de manuels

Exercices sur la simplification de fractions, fractions irréductibles

Exercices de partage et de répartition (type problèmes de brevet)

Ces exercices se trouvent dans n'importe quel manuel de mathématiques

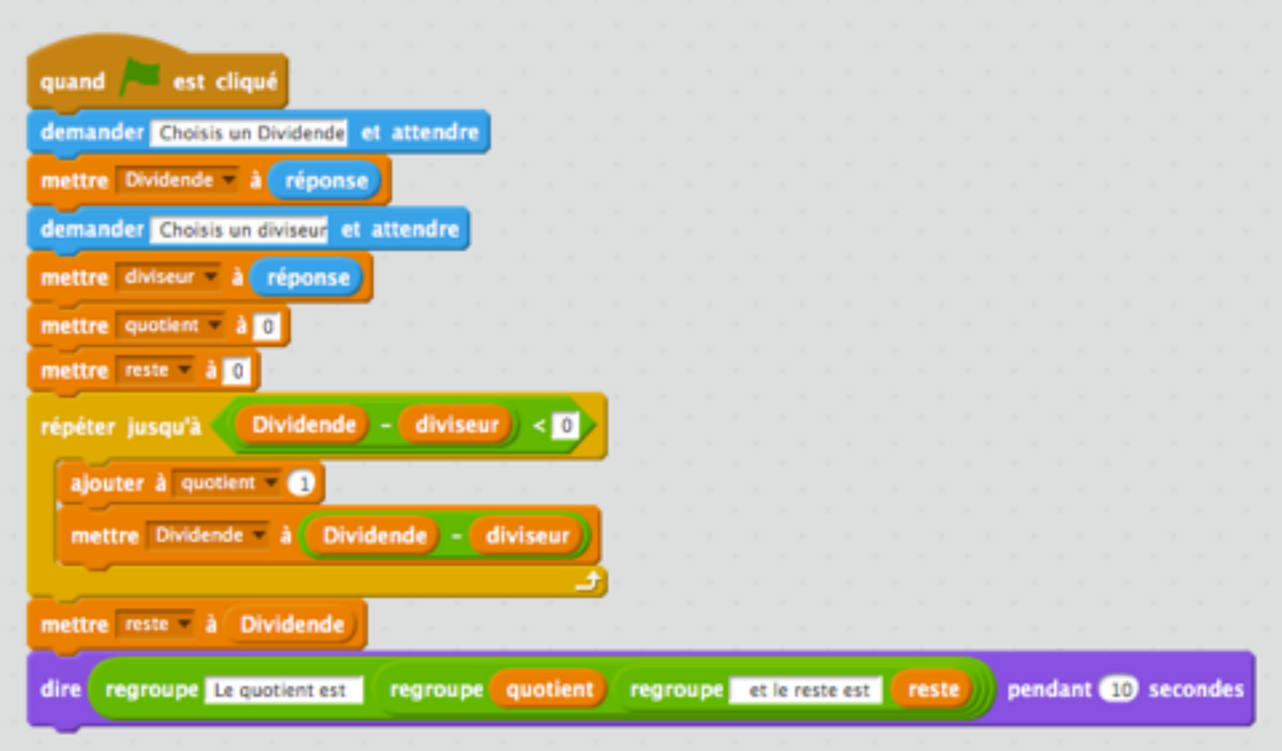
Algorithmique

Programme n°1

Objectif : reprogrammer la division euclidenne.

Ecrire un programme par soustractions successives pour donner le quotient et le reste de la division euclidienne de deux nombres.

Présenter la version « Scratch » de l'algorithme aux élèves sans leur annoncer l'objectif de cet algorithme



Puis rédiger (seul ou en classe entière) une traduction par bloque de cet algorithme avec un détail pas à pas sur un exemple concret

Programme n°2

Objectif : déterminer si un nombre entier saisi par l'utilisateur est premier ou non.

Algorithme :

Il consiste simplement à diviser le nombre entier candidat par tous les nombres entiers supérieurs ou égal à 2 qui lui sont inférieur. On teste le reste de la division euclidienne. Si ce reste est nul alors le nombre n'est pas premier. Si le nombre n'est divisible que par lui même, alors il est premier.

On peut améliorer et du coup complexifier cet algorithme en testant le quotient de la division ce qui permet de ne diviser que par les entiers inférieurs à la racine carrée du nombre entier de départ. C'est une proposition à faire aux élèves les plus compétents.

Voici la version « papier » à donner aux élèves pour analyse.

Un nombre entier est-il premier ?

Et la version « Scratch » pour correction