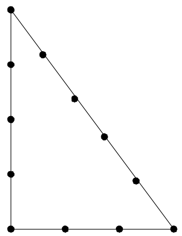
LES TRIPLETS PYTHAGORICIENS

Définition

> On dit que trois nombres a, b et c entiers naturels forment un *triplet pythagoricien* s'ils vérifient la relation : $a^2 + b^2 = c^2$.

Rechercher des triplets pythagoriciens revient à chercher des triangles rectangles dont les côtés sont des nombres entiers.



Un célèbre triplet pythagoricien est (3 ; 4 ; 5), connu depuis l'Antiquité et utilisé par les architectes égyptiens pour tracer des angles droits. Cette technique est d'ailleurs encore employée de nos jours, par les maçons creusois par exemple, sous forme de corde à nœuds : sur une corde fermée, on place 12 nœuds régulièrement espacés. On peut ainsi reconstituer le triangle rectangle (3 ; 4 ; 5), et fabriquer une équerre de poche (pliable !).

I. Restriction de la recherche

1) Triplets irréductibles

Théorème

> (a ; b ; c) est un triplet pythagoricien, si et seulement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, (na ; nb ; nc) en est aussi un.

(La démonstration est évidente).

Par exemple, (6 ; 8 ; 15) et (27 ; 36 ; 45), obtenus en multipliant (3 ; 4 ; 5) par respectivement 2 et 9, sont des triplets pythagoriciens.

Théorème

> Si deux des trois nombres composant un triplet pythagoricien ont un diviseur commun d, alors d divise aussi le troisième nombre.

Démonstration
En effet, supposons que d soit un diviseur commun de a et b par exemple : il existe deux entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
Alors $c^2 = a^2 + b^2 = d^2(a'^2 + b'^2)$. Donc d^2 divise c^2, et donc d divise c.
Le raisonnement est similaire si d divise a et c, ou b et c.

Supposons que a et b soient premiers entre eux. Nécessairement a et c aussi par exemple. Sinon on pourrait trouver un diviseur commun d à a et c, qui diviserait donc b, ce qui est absurde puisque a et b sont supposés être premiers entre eux.

Donc tout triplet pythagoricien peut se ramener à un triplet pythagoricien « réduit », où a, b et c sont premiers entre eux deux à deux (il suffit que deux d'entre ces nombres le soit).

On se limitera donc à l'étude des triplets pythagoriciens (a, b, c), avec a, b et c premiers entre eux deux à deux. Un tel triplet est appelé triplet irréductible.

2) Etude de la parité

Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien irréductible. Étudions d'abord la parité de a, b et c.

- **En premier lieu, ces trois nombres ne peuvent pas être tous pairs** car ils sont premiers entre eux deux à deux.

- **Pour la même raison, il ne peut pas y avoir deux nombres pairs (et un impair) :** cela est immédiat, puisque a, b et c sont premiers entre eux deux à deux.

- **Prouvons que les trois nombres ne peuvent pas être tous impairs.**

En effet

si a et b sont impairs, a^2 et b^2 sont impairs, donc $a^2 + b^2 = c^2$ est pair. Donc c est pair.
si a et c sont impairs, a^2 et c^2 sont impairs, donc $b^2 = c^2 - a^2$ est pair. Donc b est pair.

Première conclusion : deux des nombres sont impairs, et le troisième pair.

- **Prouvons que c est impair.**

En effet, supposons que a et b sont impairs (et donc c pair) : il existe donc deux entiers a' et b' tels que $a = 2a' + 1$ et $b = 2b' + 1$.
Alors $c^2 = a^2 + b^2 = (2a' + 1)^2 + (2b' + 1)^2 = 4(a'^2 + a' + b'^2 + b') + 2$.
Donc $c^2 \equiv 2 \pmod 4$. Or c est pair, ce qui est contradictoire.
Donc a et b sont de parités différentes, et c est impair (d'après la première conclusion 1).
On appelle b le nombre pair, et a et c les impairs.

Deuxième conclusion : a est impair, b est pair et c est impair.

Bilan : nous travaillerons donc sur les triplets irréductibles (a, b, c). Ces trois nombres sont premiers deux à deux ; si de plus a et c sont impairs et b est pair, on dira que le triplet est irréductible et rangé.
(cette façon de ranger les trois nombres d'un triplet, au détriment possible de leur ordre relatif, permet de « standardiser » les propriétés à venir : en particulier, nous noterons (15 ; 8 ; 17) plutôt que (8 ; 15 ; 17)).

II. Détermination de tous les triplets irréductibles

Théorème

> Soit a, b et c trois nombres entiers.
> (a ; b ; c) est un triplet pythagoricien irréductible rangé si et seulement si il existe deux nombres u et v ($u > v$), de parités différentes et premiers entre eux, tels que $a = u^2 - v^2$; $b = 2uv$; $c = u^2 + v^2$.

Démonstration
Démontrons le théorème dans le sens direct. Soit donc (a ; b ; c) un triplet pythagoricien irréductible rangé.
Dans un tel triplet, nous avons convenu que b était pair : posons $b = 2p$. On a donc :

$$c^2 - a^2 = 4p^2 \text{ soit } (c+a)(c-a) = 4p^2$$

a et c étant impairs, $c + a$ et $c - a$ sont tous les deux pairs.
Posons donc :

$c + a = 2q$ où q entier naturel non nul ;
$c - a = 2r$ où r entier naturel non nul.

De ces égalités, on tire :

$a = q - r$ et $c = q + r$.

D'autre part, $(c+a)(c-a) = 4qr = 4p^2$ donc $p^2 = qr$.

Montrons que q et r sont des carrés d'entiers naturels. Tout d'abord, ils sont premiers entre eux (en effet, tout diviseur premier commun à q et r diviserait leur somme $q + r = c$, et leur différence $q - r = a$… qui sont eux-mêmes premiers entre eux…).
Par conséquent, chaque diviseur premier de $p^2 = qr$ ne peut donc diviser *à la fois* q et r ; comme p^2 est un carré, l'exposant de ce diviseur premier est pair dans celui des deux nombres où ce diviseur premier figure. Il en résulte que q et r sont effectivement des carrés d'entiers naturels, puisque chacun de leurs diviseurs premiers a un exposant pair.

BILAN :

on a donc $q = u^2$ et $r = v^2$, si bien que $a = u^2 - v^2$ et $c = u^2 + v^2$;
d'autre part, on sait que $b = 2p$ avec $p^2 = qr = u^2v^2$; on peut prendre $b = 2uv$.

Reste à vérifier que les nombres u et v remplissent les conditions du théorème.
Comme $a = q - r > 0$, on a $q > r$ donc $u > v$.
u et v ne sont pas de même parité (sinon $u^2 - v^2 = a$ serait pair, ce qui n'est pas le cas avec un triplet rangé).
Comme q et r sont premiers entre eux, il en est de même de u et v.

Réciproquement, avec les valeur proposées pour a, b et c, il est immédiat de vérifier que $a^2 + b^2 = c^2$. Comme u et v sont de parité différente, il en est de même de leur carré, ce qui prouve que a et c sont bien impairs.
Si a et c avaient un diviseur premier commun, ce diviseur diviserait $a + c = 2u^2$ et $c - a = 2v^2$. Comme ce diviseur premier ne peut pas être 2 (a et c sont impairs), il diviserait u^2 et v^2 et donc u et v, ce qui est impossible puisque u et v sont premiers entre eux.

Voici les premiers triplets irréductibles rangés :

$u =$	$v =$	$a =$	$b =$	$c =$
2	1	**3**	**4**	**5**
3	2	**5**	**12**	**13**
4	1	**15**	**8**	**17**
4	3	**7**	**24**	**25**

$u =$	$v =$	$a =$	$b =$	$c =$
7	4	**33**	**56**	**65**
7	6	**13**	**84**	**85**
8	1	**63**	**16**	**65**
8	3	**55**	**48**	**73**

$u =$	$v =$	$a =$	$b =$	$c =$
5	2	**21**	**20**	**29**
5	4	**9**	**40**	**41**
6	1	**35**	**12**	**37**
6	5	**9**	**60**	**61**
7	2	**45**	**28**	**53**

$u =$	$v =$	$a =$	$b =$	$c =$
8	5	**39**	**80**	**89**
8	7	**15**	**112**	**113**
9	2	**77**	**36**	**85**
9	4	**65**	**72**	**97**
9	8	**17**	**144**	**145**

III. Quelques propriétés complémentaires

1) Triplets et cercle-unité

Soit (a ; b ; c) un triplet pythagoricien. On a alors $a^2 + b^2 = c^2$, soit $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$.

Autrement dit, résoudre l'équation revient à déterminer les points du cercle-unité à coordonnées rationnelles, et par la même occasion les réels x, tels que cos x et sin x soient rationnels.

Il en existe donc une infinité, dont voici les premiers :

$a =$	$b =$	$c =$	a/c	b/c
3	4	5	3/5 = 0,6	4/5 = 0,8
5	12	13	5/13	12/13
15	8	17	15/17	8/17
7	24	25	7/25 = 0,28	24/25 = 0,96

On peur remarquer que certains sont même décimaux : ce sont ceux pour lesquels c est de la forme 5^k (puisque c est impair , et le triplet irréductible).
Les premiers sont :

c	a	b	a/c	b/c
5	3	4	**0,6**	**0,8**
25	7	24	**0,28**	**0,96**
125	117	44	**0,936**	**0,352**
625	527	336	**0,8432**	**0,5376**
3125	237	3 116	**0,07594**	**0,99712**
15 625	11 753	10 296	**0,752192**	**0,658944**
78 125	76 443	16 124	**0,9784704**	**0,2063872**
390 625	164 833	354 144	**0,42197248**	**0,90660864**
1 953 125	922 077	1 721 764	**0,472103424**	**0,881543168**

2) Les triplets cousins

Définition

Un triplet est dit cousin si deux des nombres le composant sont consécutifs.

C'est le cas de (3 ;4 ;5) (le seul super-cousin !), de (7 ; 24 ; 25), de (21 ; 20 ; 29) ou de (27304197 ; 270304196 ; 38613965).

Remarques
Un triplet cousin est nécessairement irréductible, car deux nombres consécutifs ne peuvent pas avoir de diviseur commun…

Il y a deux catégories de triplets irréductibles cousins : on appellera *triplets cousins du premier type* ceux pour lesquels b et c sont consécutifs, et *triplets cousins du second type* ceux pour lesquels a et b sont consécutifs. Rappelons que a et c ne peuvent pas être consécutifs, puisqu'ils sont tous deux impairs…

Statistiquement, il en existe beaucoup plus du premier type que du second…

- **Triplets cousins du premier type**

Ils sont simples à fabriquer. En effet, si le triplet est (a, b, c), avec $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ et $c = u^2 + v^2$ (u et v de parités différentes et premiers entre eux), b et c sont consécutifs si et seulement si $c - b = 1$, c'est à dire $(u - v)^2 = 1$. C'est le cas si et seulement si u et v consécutifs : on a alors $u = v + 1$ (car $u > v$).
On en déduit $a = u^2 - v^2 = 2v + 1$; $b = 2uv = 2v(v + 1)$; $c = u^2 + v^2 = 2v(v + 1) + 1$.
Cette méthode engendre donc **tous** les triplets cousins du premier type.
Les premiers sont : pour $v = 1$: (3 ; 4 ; 5)
pour $v = 2$: (5 ; 12 ; 13)
pour $v = 3$: (7 ; 24 ; 25)
pour $v = 4$: (9 ; 40 ; 41)
pour $v = 5$: (11 ; 60 ; 61)…

- **Triplets cousins du second type**

Ils sont plus délicats à déterminer…
a et b sont consécutifs si et seulement si $|a - b| = 1$, soit $|(u - v)^2 - 2v^2| = 1$: on reconnaît alors l'équation de Pell-Fermat $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, en posant $x = u - v$ et $y = v$.
Nous savons qu'une telle équation admet pour solutions les nombres x_n et y_n définis par :

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}, \text{ et } y_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

En prenant n entier impair, on obtient les solutions de $x^2 - 2y^2 = -1$; avec n est pair, on a les solutions de $x^2 - 2y^2 = 1$.

Voici les premières possibilités :

n	x	y	$u = x + y$	$v = y$	$\mathbf{a = u^2 - v^2}$	$\mathbf{b = 2uv}$	$\mathbf{c = u^2 + v^2}$
1	1	1	2	1	**3**	**4**	**5**
2	3	2	5	2	**21**	**20**	**29**
3	7	5	12	5	**119**	**120**	**169**
4	17	12	29	12	**697**	**696**	**985**
5	41	29	70	29	**4 059**	**4 060**	**5 741**
6	99	70	169	70	**23 661**	**23 660**	**33 461**
7	239	169	408	169	**137 903**	**137 904**	**195 025**
8	577	408	985	408	**803 761**	**803 760**	**1 136 689**
9	1393	985	2378	985	**4 684 659**	**4 684 660**	**6 625 109**
10	3363	2378	5741	2378	**27 304 197**	**27 304 196**	**38 613 965**

On constate qu'effectivement les triplets du second type sont bien moins fréquents que ceux du premier type, puisque par exemple, avant $a = 1\,000\,000$, il y en a 8 du second type, contre 499 999 du premier type !