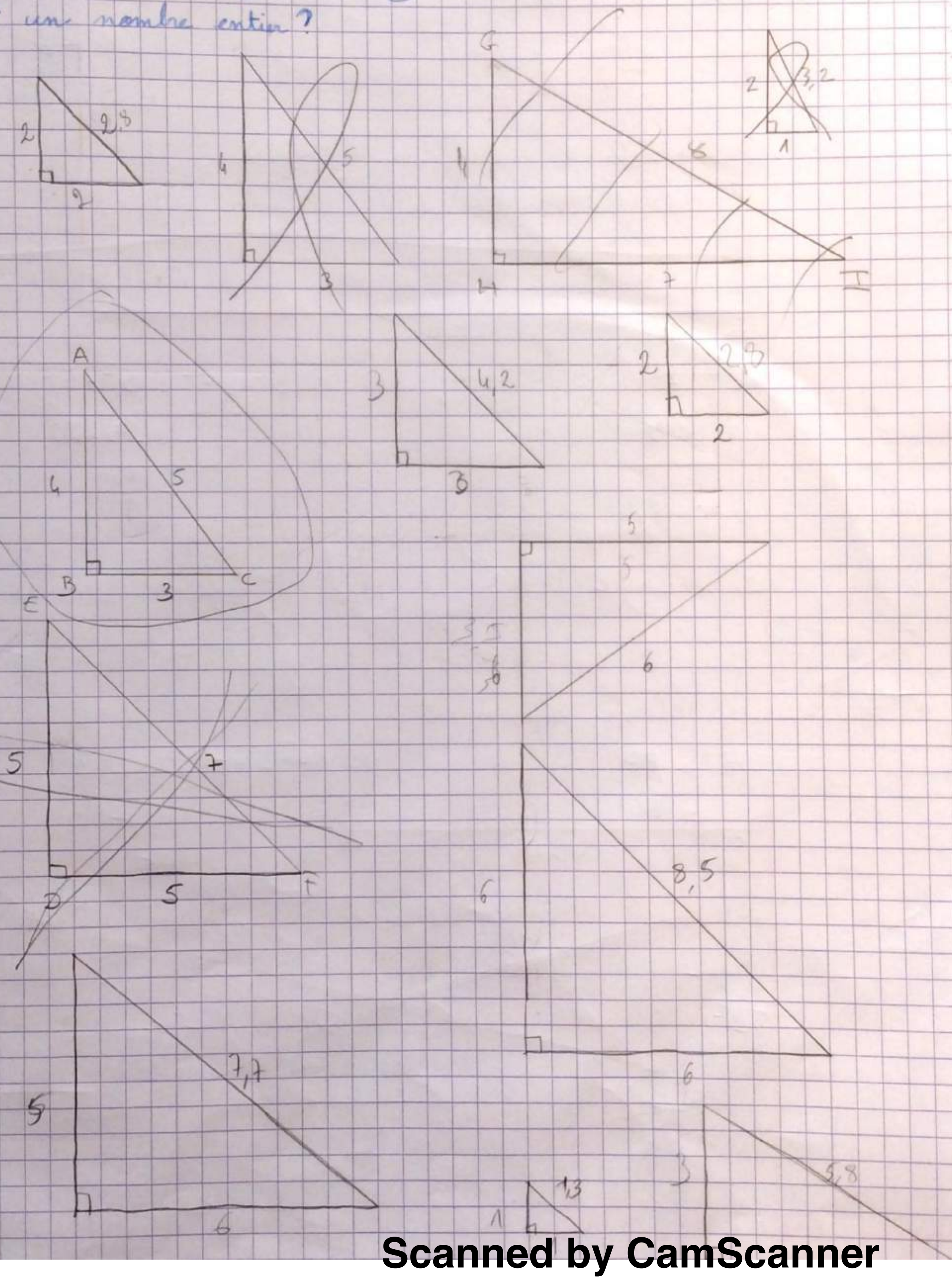
Cahier d'un élève de 3ème2

Année 2015-2016

Les triangles rectangles entiers

Enoncé :

Existe-il des triangles rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre entier ?



~~Le triangle ABC est rectangle en B.~~

Dans le triangle ABC, le plus grand côté est [AC] ~~= 5 cm~~ et AC = 5 cm

On calcule séparément.

$AC^2 = 5^2$
$= \underline{25}$

$AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2$
$= 16 + 9$
$= \underline{25}$

On constate l'égalité de Pythagore.

Le triangle ABC est donc rectangle en B.

Dans le triangle DEF, le plus grand côté est EF = 7 cm

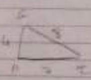
On calcule séparément

$EF^2 = 7^2$
$= 43$

$ED^2 + DF^2 = 5^2 + 5^2$
$= 25 + 25$
$= \underline{50}$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée.

Le triangle DEF n'est pas rectangle en D.



Dans le triangle GHI, le plus grand côté est GI = 8 cm

On calcule séparément

$GI^2 = 8^2$
$= 64$

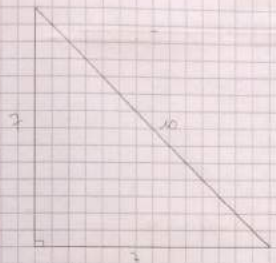
$GH^2 + HI^2 = 4^2 + 7^2$
$= 16 + 49$
$= 65$

Dans le triangle JKL, le plus grand côté est JL = 6 cm

On calcule séparément

$JL^2 = 6^2$
$= 36$

$JK^2 + KL^2 = 6^2 + 5^2$
$= 61$



$10^2 = \underline{100}$

$7^2 + 7^2 = \underline{98}$

$299^2 = 89\,401$

$180^2 + 240^2 = 90\,000$

$\boxed{10^2 = 100 \quad 6^2 + 8^2 = 100}$

$4^2 + 8^2 = 80$

$9^2 = 81$

$7^2 = 49$

$6^2 + 4^2 = 52$

$27^2 = 729$

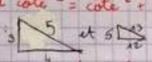
$24^2 + 12^2 = 720$

$\boxed{13^2 = 169 \quad 5^2 + 12^2 = 169}$

Bilan de la recherche

* Les instruments de mesure ne permettent pas de valider qu'un triangle entier est rectangle (par exemple, quand l'erreur est petite ou que l'on change l'unité de mesure)
* On utilise <u>le théorème de Pythagore</u> pour vérifier qu'un triangle est rectangle.

plus grand côté² = côté² + autre côté²

→ Ex : 

* Une fois qu'on a trouvé un triangle rectangle, on peut en trouver d'autres par agrandissement.

Etude 1. Recherche de triangles rectangles entiers.

Théorème de Pythagore

Dans un triangle ABC

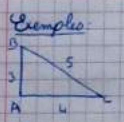
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Alors le triangle ABC est rectangle en A.

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

Alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

Exemples:

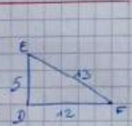


$BC^2 = 5^2 = 25$

$AC^2 + AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$

$= 25$

D'après le théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A



$EF^2 = 13^2 = 169$

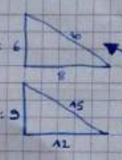
$ED^2 + DF^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

D'après le théorème de Pythagore, EDF est rectangle en D.

Peut-on en trouver d'autres ?

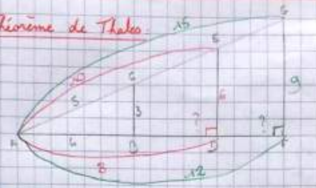
On peut agrandir un triangle rectangle entier pour en obtenir un autre:

- Agrandissement ×2 :
- Agrandissement ×3 :



Ils sont tous les 2 rectangles d'après le théorème de Thalès.

Théorème de Thales



Les points A, B, D et A, C, E sont alignés.

Si $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{CB}{ED} \leftarrow \dfrac{4}{8} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Alors (BC) // (DE)

De même, A, B, F et A, C, G sont alignés.

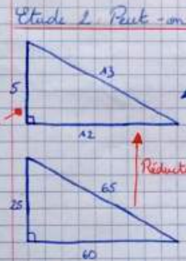
$\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{AC}{AG} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$;

$\dfrac{BC}{GF} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

D'après le théorème de Thalès, (BC) // (GF)

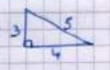
Conclusion: Les triangles ADE et AFG sont des triangles rectangles entiers.

Etude 2. Peut-on réduire un triangle rectangle entier ?



PGCD (5 ; 12 ; 13) = 1

Pas la même forme que



Réduction par 5 = PGCD (25 ; 60 ; 65)

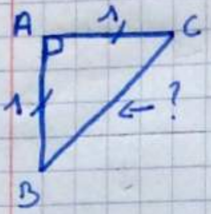
$$\begin{pmatrix} 65^2 = 4\,225 \\ 25^2 + 60^2 = 4\,225 \end{pmatrix}$$

Conclusion:
- Quand le PGCD des 3 côtés est différent de 1, on peut réduire le triangle rectangle
- Quand le PGCD des côtés est égal à 1 (on dit que les 3 côtés sont premiers entre eux) alors on ne peut pas réduire le triangle rectangle ← on dit que c'est un triangle rectangle entier primitif.

Etude 3 : Existe-t-il des triangles rectangles isocèles entiers ?

$4^2 = 16$ | $4^2 + 1^2 = 17$

Conjecture : Il n'en existe pas.



Le triangle ABC est rectangle en A

D'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 1^2 + 1^2$

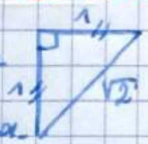
$BC^2 = 2$

$BC = \sqrt{2}$

$BC \simeq 1,414213562\ldots$ ← C'est une valeur décimale approchée

↳ Un nombre infini de chiffres après la virgule.

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel comme π

Conclusion : On ne pourra pas agrandir le triangle  pour obtenir un nombre entier sur l'hypothénuse.

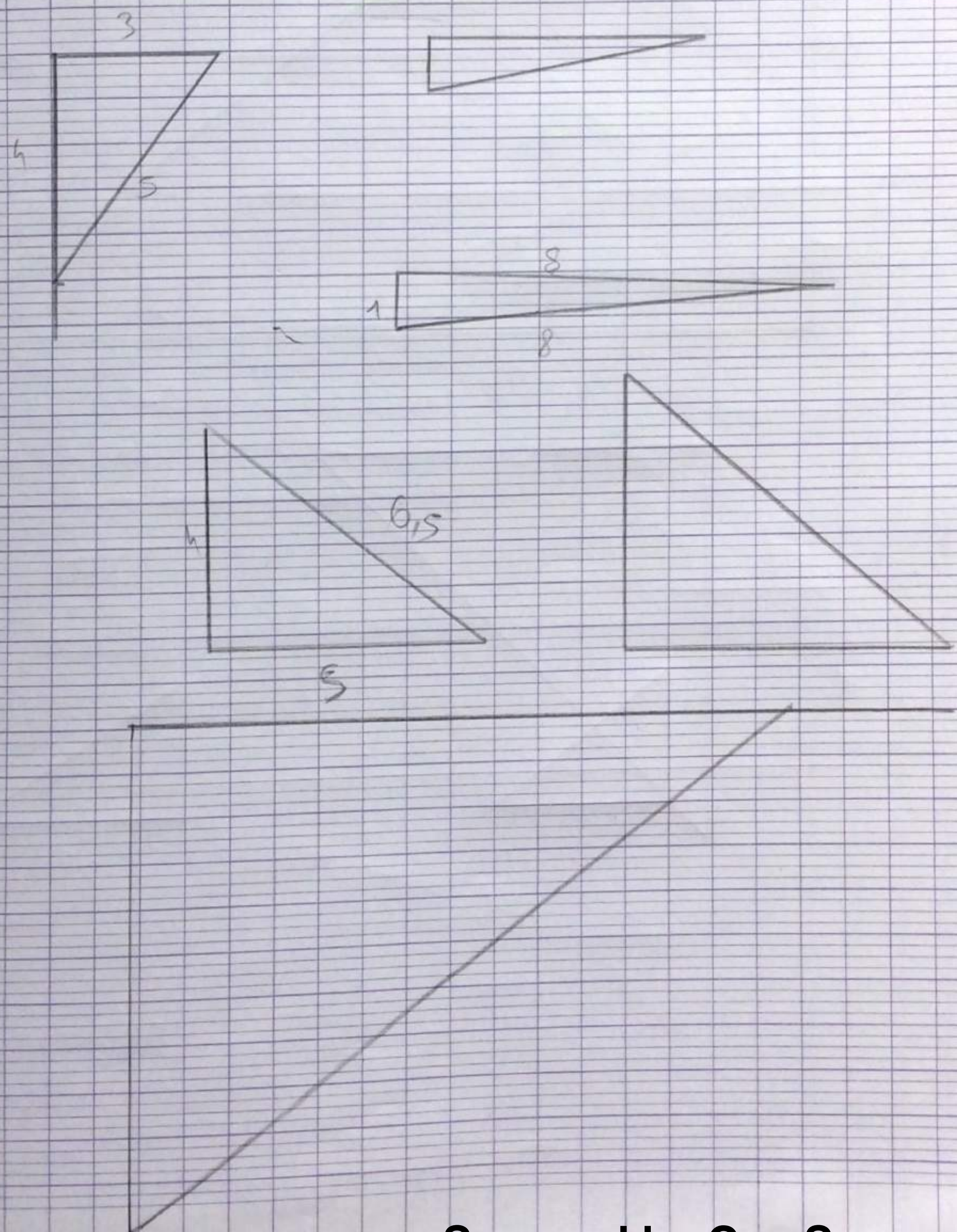
Cahier d’un élève de 3ème2

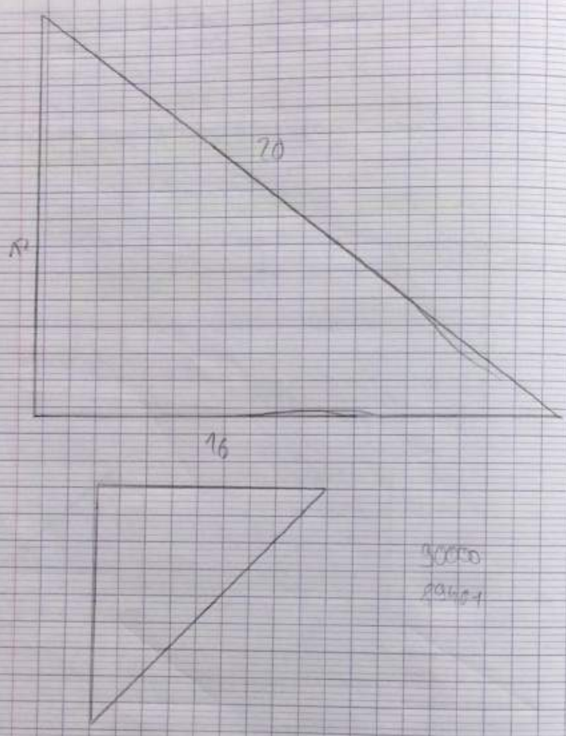
Année 2015-2016

Les triangles rectangles entiers

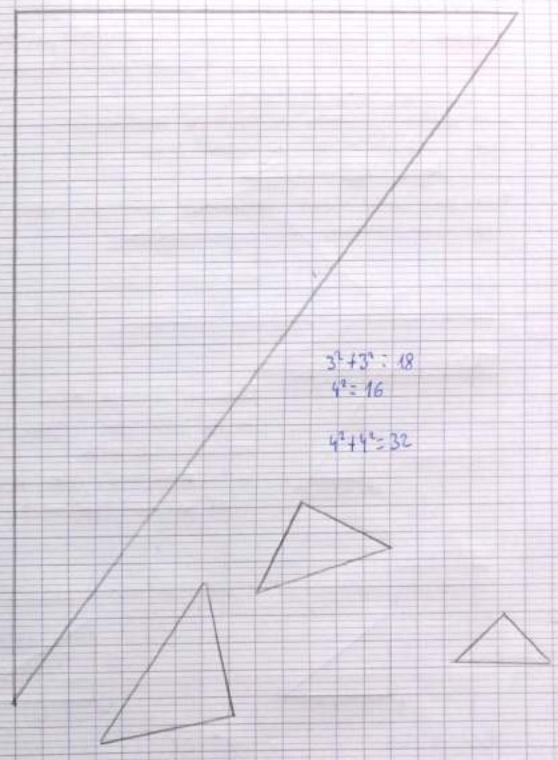
Enoncé:

Existe-il des triangles rectangles dont la longeur de chaque côté est un nombre entier?





30000
19401



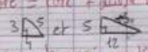
$3^2+3^2=18$

$4^2=16$

$4^2+4^2=32$

Bilan de la recherche :

* ~~Quand~~ Les instruments de mesure ne permettent pas de valider qu'un triangle entier est rectangle (par exemple, quand l'erreur est petite ou que l'on change l'unité de mesure)
* On utilise le théorème de Pythagore pour vérifier qu'un triangle est rectangle : plus grand côté^2 = côté^2 + autre côté^2

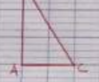
↳ Ex : 

* Une fois qu'on a trouvé un triangle rectangle, on peut trouver d'autres par agrandissement

Etude 1

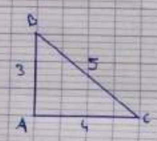
Recherche de triangles rectangles entiers

Théorème de Pythagore :



Dans un triangle ABC
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Alors le triangle ABC est rectangle en A
Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ Alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

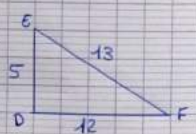
Exemples :



$BC^2 = 5^2 = 25$

$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
$= 25$

D'après le théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A



$EF^2 = 13^2 = 169$

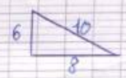
$DE^2 + DF^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144$
$= 169$

D'après le théorème de Pythagore, DEF est rectangle en D

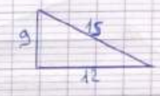
Peut-on en trouver d'autres ?

On peut agrandir un triangle rectangle entier pour en obtenir un autre :

• Agrandissement x2 :

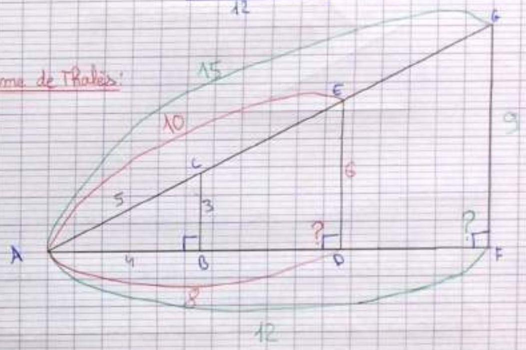


Agrandissement x3 :



Ils sont tous les deux rectangles d'après le Théorème de Thalès

Théorème de Thalès :



Les points A, B, D et A, C, E sont alignés

Si $\frac{AB}{AB} = \frac{AC}{AG} = \frac{BC}{DE}$ Alors (BC)//(DE)

$\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

De même, A, B, F et A, C, G sont alignés

$\frac{AB}{AF} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{AC}{AG} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; $\frac{BC}{GF} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

D'après le théorème de Thalès, (BC)//(GF)

Conclusion : Les triangles ADE et AFG sont des triangles rectangles entiers.

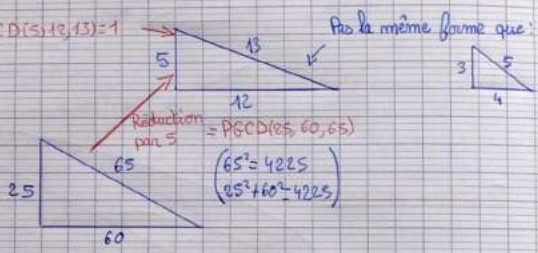
⟹ On peut trouver une infinité de triangles rectangles entiers.

Etude 2

Peut-on réduire un triangle rectangle entier ?

PGCD(5; 12; 13) = 1

Pas la même forme que :



= PGCD(25, 60, 65)

$$\left(\begin{array}{l} 65^2 = 4225 \\ 25^2 + 60^2 = 4225 \end{array}\right)$$

Conclusion :

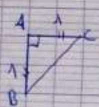
- Quand le PGCD des 3 côtés est différents de 1, on peut réduire le triangle rectangle
- Quand le PGCD des 3 côtés est égale de 1 (on dit que les 3 côtés sont premiers entre eux) alors on ne peut pas réduire le triange rectangle

on dit que c'est un triangle rectangle entiers primitif.

Etude 3

Existe-t-il des triangle rectangle isocèle entiers ?

Conjecture : il n'en existe pas.



Théorème de Pythagore

Le triangle est rectangle donc

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 1^2 + 1^2$

$= \sqrt{2}$

$\simeq 1{,}414213562$ c'est une valeur décimale approché.

↳ un nombre infini de chiffre après la virgule.

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel comme π.

conclusion : On ne pourra pas agrandir le triangle pour obtenir un nombre entier sur l'hypoténuse.

Cahier d’un élève de 3ème7

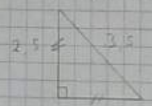
Année 2015-2016

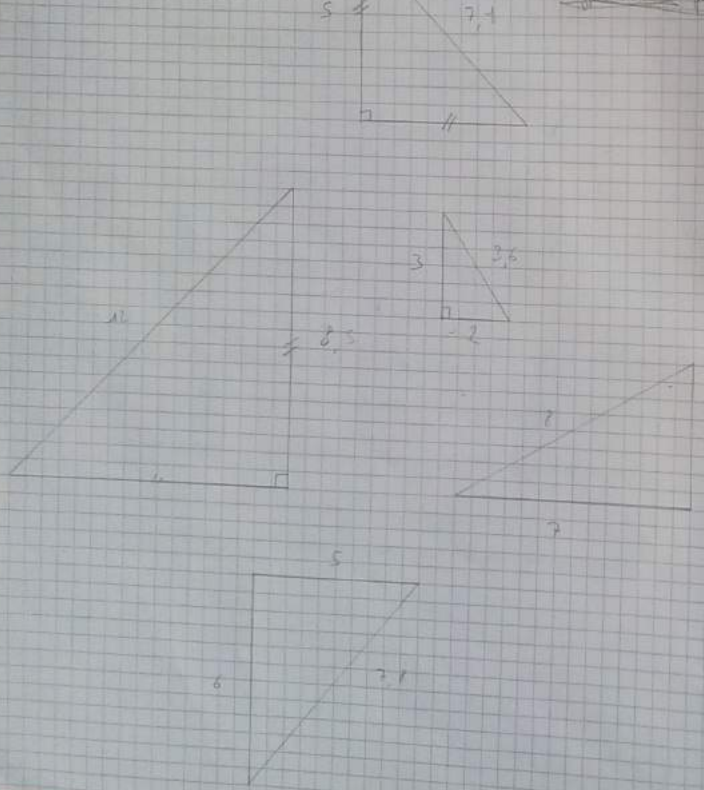
Les triangles rectangle entier

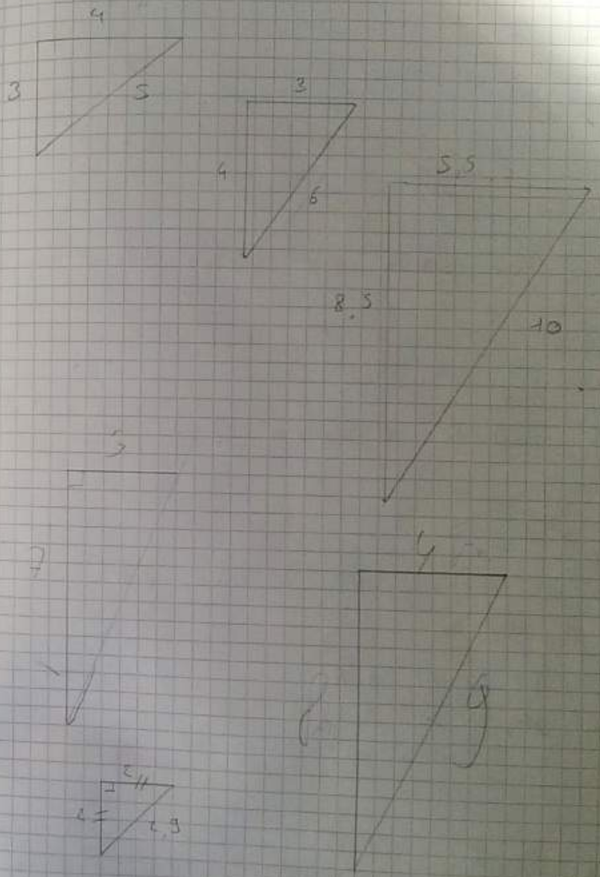
Énoncé :

Existe-t-il des triangles rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre entier naturel ?

- 2 côtés égaux ?
- la base = $\frac{\text{hauteur}}{2}$
- ~~hypoténuse~~ pair



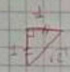




Bilan de recherche

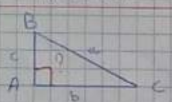
- La mesure d'une figure ne permet pas de valider une conjecture
- Pour vérifier qu'un triangle est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore

$$\text{hypoténuse}^2 = \text{côté}^2 + \text{autre côté}^2$$

- Cas particulier  $\sqrt{2} = 1{,}414$
- Par agrandissement , on ne pourra pas obtenir un triangle rectangle isocèle entier

A partir d'un triangle rectangle entier on peut en trouver d'autres par agrandissement ou réduction (Thalès)

Etude n°1 - Recherche de triangles rectangles entiers

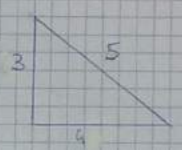


A quelle condition le triangle ABC est rectangle en A ?

Théorème de Pythagore

> Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$
> $(a^2 = c^2 + b^2)$
> Alors le triangle est rectangle en A

Ex :



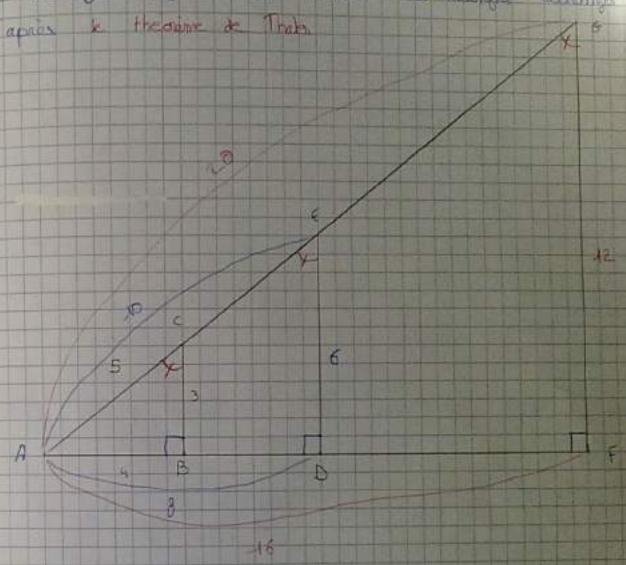
$\left.\begin{array}{l} 5^2 = 25 \\ 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \end{array}\right\}$ le triangle ABC est rectangle en A

D'autres triangles rectangles entiers

$10^2 = 100$

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Les triangles agrandis sont encore des triangles rectangles d'après le théorème de Thalès



Théorème de Thalès :

Si les points A, B, D et A, C, E sont alignés (dans cet ordre)

Si $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$

Alors $(BC) \parallel (DE)$

Conséquence : les angles sont conservés !

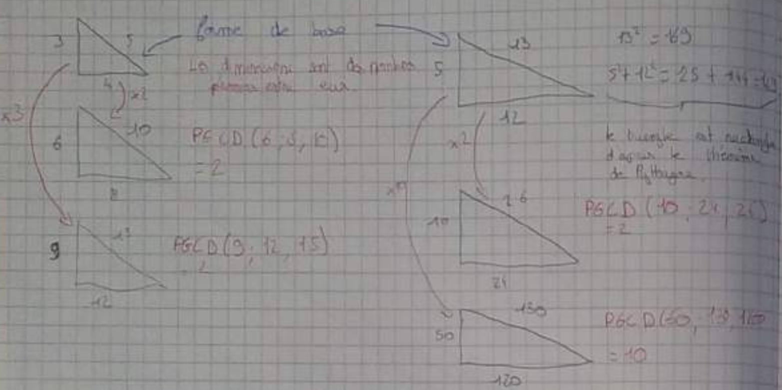
Vérification sur le schéma :

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{BC}{DE} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

D'après le théorème de Thalès, $(BC) \parallel (DE)$

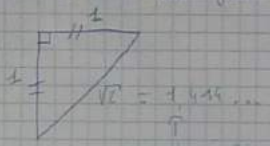
Le triangle ADE est rectangle en D.

Etude n°2 : Y a-t-il différentes formes de triangles rectangles entiers



<u>Conclusion</u> : Il existe d'autres triangles primitifs (le PGCD des longueurs est 1) mais ils sont compliqués à trouver (hors programme)

Existe-t-il une forme de base (triangle primitif) isocèle ?

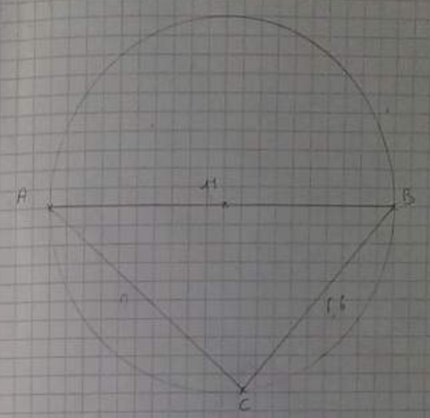


Impossible de multiplier $\sqrt{2}$ pour obtenir un nombre entier

On dit que $\sqrt{2}$ est un <u>nombre irrationnel</u> !

Etude n°3 : Approfondissements et applications du théorème de Pythagore

Exercice 4 :



2) Si un triangle est inscrit dans un cercle et l'hypoténuse est le diamètre alors le triangle est rectangle.

Si un triangle a son plus grand côté qui est le diamètre de son cercle circonscrit

Alors il est rectangle

Donc le triangle ABC est rectangle

3) ~~On calcule séparément :~~

~~$11^2 =$~~

3) $AB^2 = AC^2 + CB^2$

$11^2 = AC^2 + 6{,}6^2$

$121 = AC^2 + 43{,}56$

$121 - 43{,}56 = 77{,}44$

$\sqrt{77{,}44} = 8{,}8$ cm

Exercice 5 :

1) $AC^2 = 25$ | $AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

D'après le théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.

2) A, B et E sont alignés donc BDC est forcément rectangle en B.
justifie le théorème de Pythagore

3) $DE^2 = BD^2 + BE^2$

$DE^2 = 6^2 + 7^2$

$DE^2 = 36 + 49$

$DE^2 = 85$

$DE = \sqrt{85}$

$DE \approx 9{,}2$

[ED] mesure 9,2 cm.

Exercice 8 :

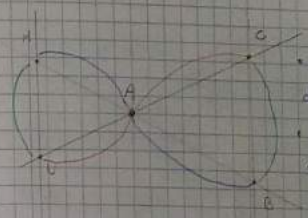
1) ~~15~~ $L \times \ell = 20 \times 15 = 300$

$L \times \ell = BH \times HC = 20 \times 10 = 200 \div 2 = 100$

$300 + 100$

Etude n°4 : Approfondissement sur l'utilisation du Théorème de Thalès.

Théorème de Thalès



- Les point M, A, B sont alignés dans cet ordre
- Les points N, A, C sont alignés dans cet ordre.

On étudie les rapports : $\frac{AM}{AB}$ $\frac{AN}{AC}$ $\frac{MN}{BC}$

Deux possibilités :

- Si $(MN) \parallel (BC)$ alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (← sens direct)
- Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

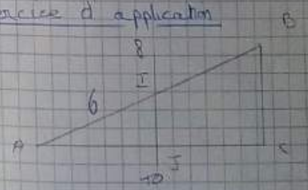
ou $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

ou $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$

Alors $(MN) \parallel (BC)$ (← réciproque)

Exercice d'application

①



$AI = 6$ $(IJ) \parallel (BC)$

$AB = 8$

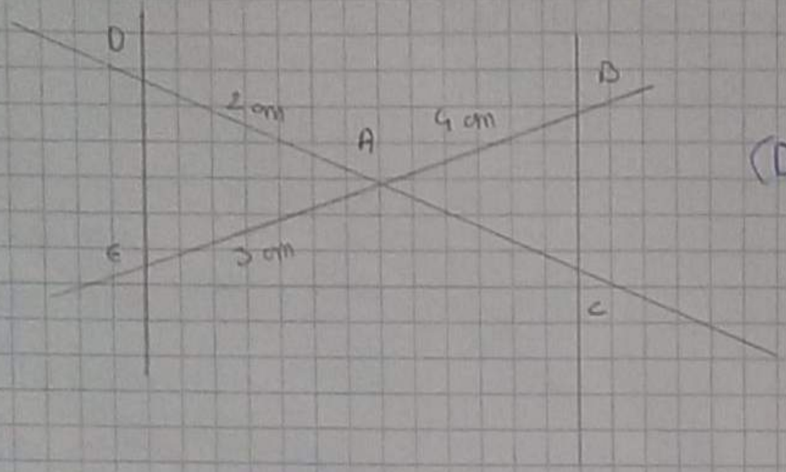
$AC = 10$

$\frac{6}{8} \times \frac{}{10} = \frac{6 \times 10}{8} = 7{,}5$

$AJ = 7{,}5$

Scanned by CamScanner

2



(DE) // (BC)

$\frac{DA}{DC} = \frac{EA}{EB} = \frac{2}{} = \frac{3}{4} = \frac{2 \times 7}{3} = 2,7$

3 Si $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}$

$\frac{3}{2} = \frac{3,9}{2,6}$

$1,5 = 1,5$

Donc (AB)//(DE)

Les points A, C, D et B, C, E sont alignés dans cet ordre.

$\frac{CA}{CD} = \frac{3}{2} = 1,5$

$\frac{BC}{CE} = \frac{3,9}{2,6} = 1,5$

D'après le théorème de Thalès (AB)//(DE)

$\frac{3}{3,75} = 0,8$ $\frac{4}{5} = 0,8$

4

Donc (IG)//(JH)

5 $\frac{MO}{NK} = \frac{5,8}{2,5}$ $\frac{MN}{NL} = \frac{7}{3}$

$= 2,32$ $= 2,33$

Donc (LK) n'est pas parallèle à (NO)