Les triangles rectangles entiers

Durée :

Connaissances et capacités exigibles :

Connaissances	Capacités
Configuration de Thales.	*- Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droites sécantes.* *- Connaître et utiliser un énoncé réciproque.*
Agrandissement et réduction. **[Reprise du programme de 4e]**	- Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celles de la figure à obtenir.

Commentaires :

- Configuration de Thales :
  - Il s'agit de prolonger l'étude commencée en classe de quatrième qui, seule, est exigible dans le cadre du socle commun.
  - La réciproque est formulée en tenant compte de l'ordre relatif des points sur chaque droite mais, dans le cadre du socle commun, les élèves n'ont pas à distinguer formellement le théorème direct et sa réciproque.
  - L'utilisation d'un logiciel de construction géométrique permet de créer des situations d'approche ou d'étude du théorème et de sa réciproque.
- Dans le cadre du socle commun, il est attendu des élèves qu'ils sachent, dans des situations d'agrandissement ou de réduction, retrouver des éléments (longueurs ou angles) de l'une des deux figures connaissant l'autre.
  En ce qui concerne les longueurs, ce travail se fait en relation avec la proportionnalité.

Contenu :

I. Mise en oeuvre de la situation
II. Analyse a priori
III. Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème
IV. Ressources autour du théorème de Thales
V. Trace écrite a priori pour le théorème de Pythagore
VI. Trace écrite a priori pour le théorème de Thales
VII. Trace écrite a priori pour la racine carrée

Doc 1 -

Thème : Mise en œuvre

➡1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 10-15 min)

Temps de présentation des enjeux de la séance

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves.

Rechercher, émettre des conjectures, faire des essais (dessins), prendre des initiatives… Une place importante est accordée ici à la preuve des conjectures émises.

Temps de familiarisation avec problème

Présentation du problème, lecture et relecture collective de l'énoncé, explication du vocabulaire.

Temps de recherche individuelle (au moins 5 min)

Appropriation du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

➡ 2ème phase : recherche en groupe (entre 30 min et 1 heure)

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourages à formuler des conjectures, trouver des éléments de preuve, apporter des justifications etc.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

➡ 3ème phase : mise en commun et débat (au moins 30 min)

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

➡ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 10 min)

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les points techniques évoqués par les élèves
- les raisonnements et méthodes utilisés
- les savoirs mathématiques utilisés

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. **A écrire en rouge dans le cahier d'exercice**.

Il faut compter au moins 2 heures pour une mise oeuvre complète

Remarque : La résolution complète du problème (avec démonstration) est compliquée pour des élèves de troisième. On peut néanmoins démontrer certaines conjectures partielles qui permettrons d'avancer dans la recherche…

Doc 2 -

Thème : Analyse a priori

Enoncé du problème

Existe-t-il des triangles rectangles dont la longueur de chaque côté est un nombre entier naturel ?

Résolution du problème

Une méthode pour déterminer tous les triangles rectangles recherchés est décrite dans le document en annexe.

Résumé de la méthode :

- Passage de registre géométrique au registre algébrique à l'aide du théorème de Pythagore
- Restriction au cas de triplets primitifs puis généralisation à l'aide du théorème de Thales (dans le registre géométrique)
- Méthode algébrique pour trouver les triplets primitifs (hors de portée d'élèves de 3ème)

Analyse des méthodes possibles par les élèves

- Essais à la main pour trouver des triangles rectangles (ils vont commencer à construire des triangles dont les deux côtés adjacents à l'angle droit vont être entiers mais où l'hypoténuse ne le sera pas).
- Utilisation du théorème de Pythagore comme caractérisation du triangle rectangle (passage du registre géométrique au registre algébrique)
- Utilisation du théorème de Pythagore pour calculer une longueur manquante dans le triangle rectangle
- Utilisation du théorème de Thales pour agrandir le triangle rectangle
- Recherche de conditions sur les entiers qui représentent les longueurs

Les mathématiques travaillées et à travailler

- Le théorème de Pythagore comme caractérisation d'un triangle rectangle
- Le théorème de Pythagore pour calculer une longueur manquante dans un triangle rectangle
- Le théorème de Thales vu comme agrandissement/réduction d'une figure
- Conservation des angles et proportionnalité des longueurs dans un agrandissement/réduction
- Arithmétique: nombres premiers entre eux, parité, divisibilité
- Calcul numérique : $\sqrt{2}$

Doc 3 -

Thème : Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

Ce qui peut apparaitre dans le bilan de la recherche

- Utilisation du théorème de Pythagore comme critère de validation des triangles rectangles
- Utilisation de l'agrandissement (Thales) pour trouver une infinité d'autres triangles rectangles entiers à partir d'un seul
- Pas possible de trouver un triangle rectangle isocèle entier.
- …

Proposition de prolongements, appelés « études » pour travailler le programme à partir de ce bilan.

Etude 1 - Comment valider le fait un triangle rectangle entier ? Comment en trouver d'autres ?

Retour sur le théorème de Pythagore. En général le triangle (3;4;5) est proposé lors du bilan ainsi que certains de ces agrandissements. Mettre en évidence ce lien via le théorème de Thales

Institutionnaliser le théorème de Pythagore et le théorème de Thales (sens direct)

Etude 2 - Y a-t-il différentes formes de triangles rectangles entiers ?

Recherche d'exemples qui ne soient pas issus du (3;4;5) ; introduction des triangles rectangles primitifs (mesures premières entre elles) ; retour sur le cas du triangle rectangle isocèle et sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Institutionnaliser la racine carrée d'un nombre positif, la notion de carrée parfait, et quelques bases d'arithmétiques si besoin

Etude 3 - Entrainement : résolution de problème en géométrie plane.

Exercices d'applications ou problèmes de brevet

Doc 4 -

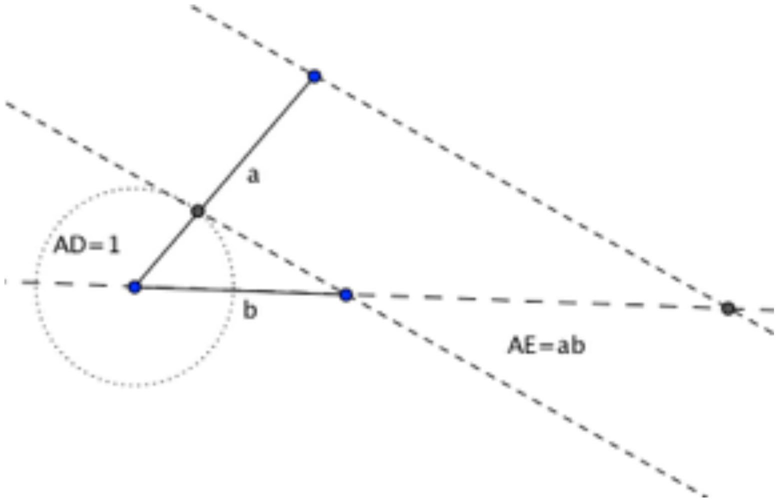
Thème : Ressources pour travailler le théorème de Thales

Constructions à la règle et au compas

Principe: constructions à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

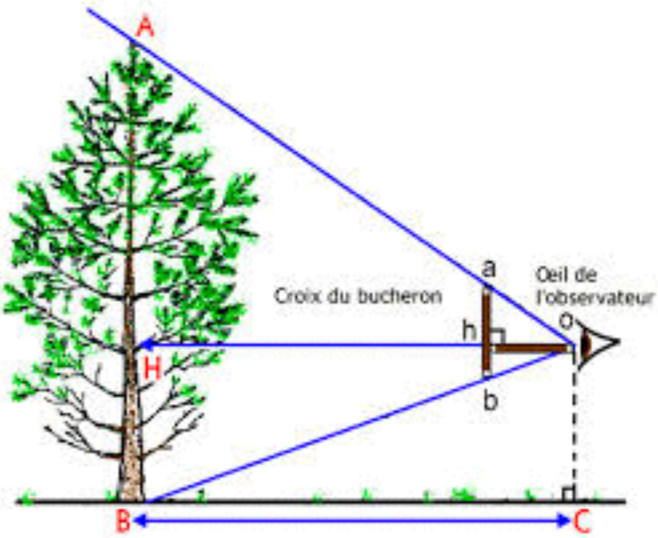
- Défi n°1: partager un segment donné en un nombre entier de parts égales.
- Défi n°2: A partir d'un segment donné, construire un segment dont la longueur est multipliée par une fraction
- Défi n°3: A partir de deux segments donnés, construire un segment dont la longueur est le produit des deux longueurs précédentes.

Indication pour le défi n°3:

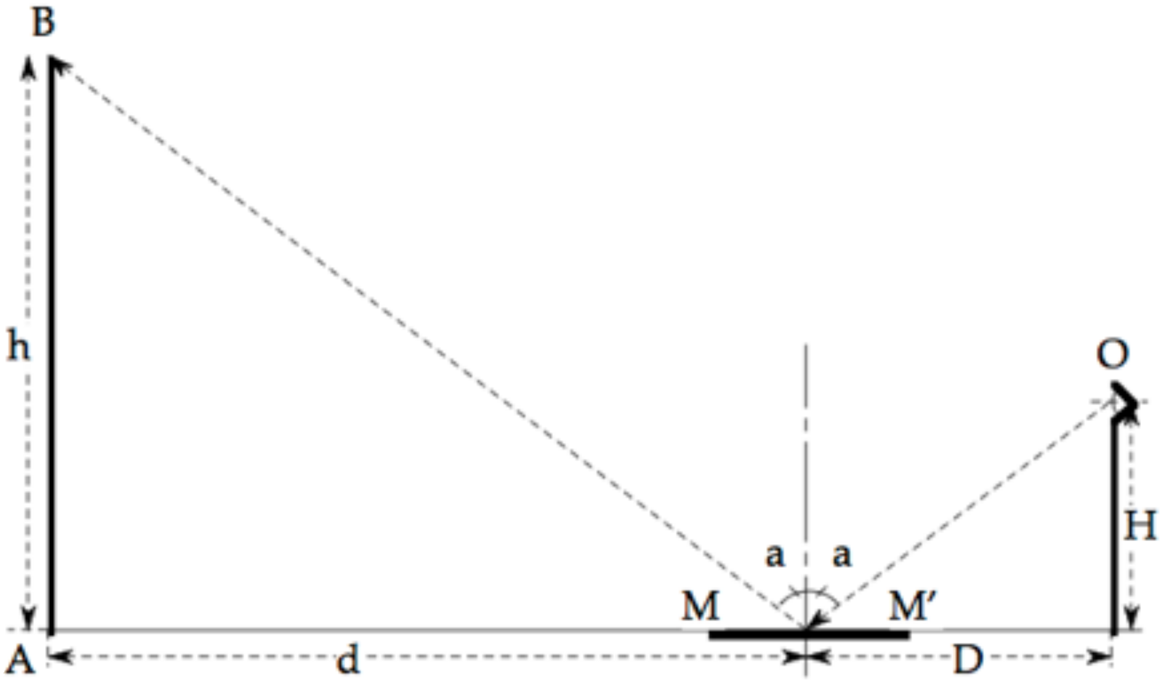


Mesures de distances inaccessibles

Méthode d'agrandissement direct basée sur la configuration des triangles emboités.



Méthode avec le miroir au sol basée sur la configuration des triangles opposés par le sommet (avec une symétrie axiale par rapport au sol)



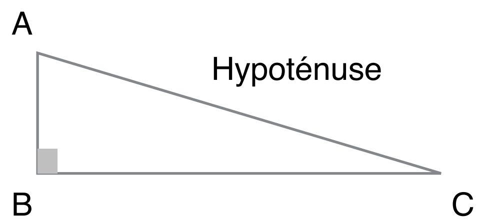
Doc 5 -

Thème : Trace écrite a priori pour le théorème de Pythagore

I. Le sens direct : pour calculer une longueur manquante

Théorème : Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en B, alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$

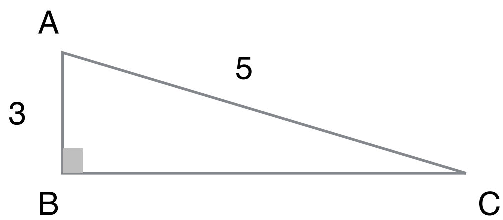


Exemple :
On considère un triangle ABC tel que ci-contre :

On sait que le triangle ABC est rectangle en B.
D'après le **théorème de Pythagore**, $AB^2 + BC^2 = AC^2$,

$$3^2 + BC^2 = 5^2$$
$$9 + BC^2 = 25$$
$$BC^2 = 25 - 9 = 16$$

Donc $BC = \sqrt{16} = 4$.



II. La contraposée et la réciproque : pour vérifier que le triangle est rectangle

Théorème : Si le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Si le carré de l'hypoténuse n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

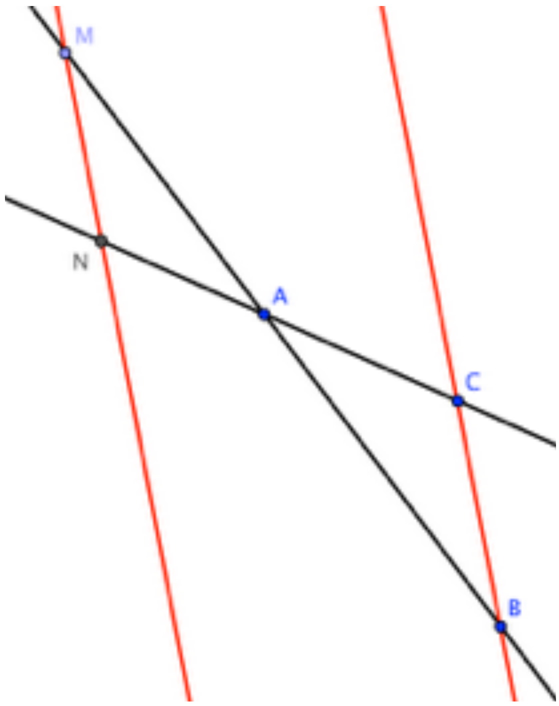
Autrement dit,

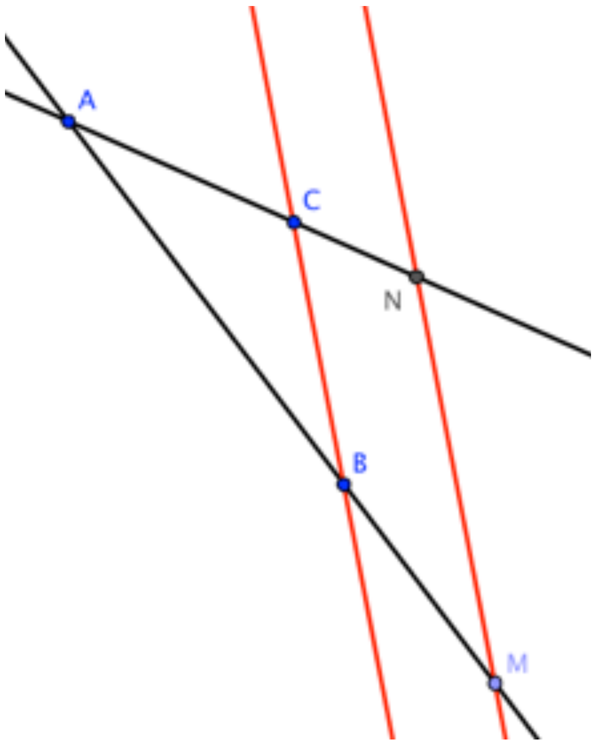
si $AB^2 + BC^2 = AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en B ;
si $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$, alors ABC n'est pas un triangle rectangle en B.

Doc 6 -

Thème : Trace écrite a priori pour le théorème de Thales

Illustrations pour le théorème de Thales





Ici, ce sont les points M, A, B et N, A, C qui sont alignés dans cet ordre.

I. Le théorème de Thales pour calculer une longueur - sens direct.

Théorème : On considère deux triangles ABC et AMN.
Si :

- les points A, B, M et A, C, N sont alignés
- les droites (MN) et (BC) sont parallèles,

Alors on a l'égalité :

$$\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$$

II. Le théorème de Thales pour prouver le parallélisme de deux droites - contraposée et réciproque.

Théorème : On considère deux triangles ABC et AMN **AVEC** les points A, B, M et A, C, N alignés **dans cet ordre**

Si $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$ OU $\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN}$ OU $\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$ alors $(BC)\parallel(MN)$.

Si $\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN}$ OU $\frac{AB}{AM} \neq \frac{BC}{MN}$ OU $\frac{AC}{AN} \neq \frac{BC}{MN}$ alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Doc 7 -

Thème : Trace écrite a priori pour la racine carrée

I. La racine carrée: définition.

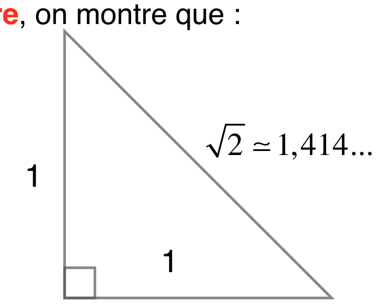
Définition: Soit *a* un nombre positif. Il existe un nombre positif dont le carré est égal à *a*.

Ce nombre est appelé « **racine carrée de *a*** » et se note $\sqrt{a}$.

Le symbole $\sqrt{\ }$ se nomme « radical ».

Exemples :
- $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$ et 3 est un nombre positif.
- $\sqrt{-4}$ n'existe pas, car il n'y a pas de nombre dont le carré est égal à –4.

D'après le **théorème de Pythagore**, on montre que :



Le nombre $\sqrt{2}$ est **irrationnel**, cela signifie qu'on ne pourra jamais obtenir un nombre entier en le multipliant par un autre nombre entier