Expériences à deux épreuves

- **Expérimentation** : lancer de deux dés ; jeu des cartons ; jeu du tourn'en rond.

- **Objectifs** : - estimer une distribution de probabilité *a priori* (ai-je plus de chance de gagner en choisissant cette option plutôt qu'une autre ?);

  - confronter cette estimation avec les résultats statistiques de nombreux jeux ou/et un calcul de cette distribution, à partir d'un tableau à double entrée ou d'un arbre.

- **Simulation** : on peut autoriser les élèves à utiliser de vrais dés (de couleur différente pour les aider ensuite à dénombrer les résultats possibles) ou imposer de simuler les tirages à l'aide de la calculatrice (avec la touche RAND ou RAN#) ou encore utiliser un tableur et un vidéo-projecteur.

- **Cours : -** construire des tableaux à double entrée ou des arbres pour modéliser et décrire des expériences aléatoires à deux épreuves.

  - s'appuyer sur les propriétés des fréquences (pourcentages, proportions. ..) pour mettre en place celles des probabilités : dans un arbre, *la fréquence ou la probabilité du résultat auquel conduit « un chemin » est égale au produit des fréquences rencontrées « le long de ce chemin » ; si le résultat se trouve « au bout de plusieurs chemins », on ajoute les fréquences correspondant à « ces chemins ».*

- **Activités :** voir les fiches élève pages suivantes.

Jeu des cartons

- **Description de l'activité :**

On dispose de dix cartons. Sur chacun figure un nombre. 5 de ces nombres sont positifs, les 5 autres sont négatifs.
Vaut-il mieux faire le pari d'obtenir un nombre négatif en tirant un seul carton ou d'obtenir un produit négatif en tirant successivement et sans remise deux cartons ?

- **Objectifs :**

Approche d'une probabilité (sans que cette valeur soit connue au départ) à partir d'un grand nombre d'expériences.
Calcul de cette probabilité (à partir d'un tableau à double entrée ou d'un arbre de modélisation).

- **Conditions de l'expérimentation de la deuxième situation :**

Découper les dix cartons.
Tirer successivement et sans remise deux cartons. Reproduire 10 fois cette expérience.
Compter le nombre de produits négatifs (sur les 10) obtenus avec les 2 cartons tirés.

- **Exploitation des résultats expérimentaux :**

Mise en commun des résultats de tous les élèves de la classe : compter le nombre de produits négatifs obtenus parmi les 10 x N (avec N : nombre d'élèves de la classe).
Calcul de la fréquence des produits négatifs.

- **Une méthode de démonstration possible : à partir d'un tableau à double entrée.**

Compléter le tableau suivant :

1^{er} tirage / $2^{ème}$ tirage										

Faire remarquer que dans toutes les « cases » de la diagonale, le produit n'existe pas.
Compter le nombre de « cases » où le produit est positif, celui où le produit est négatif.
En déduire la probabilité cherchée.

- **Résultat :**

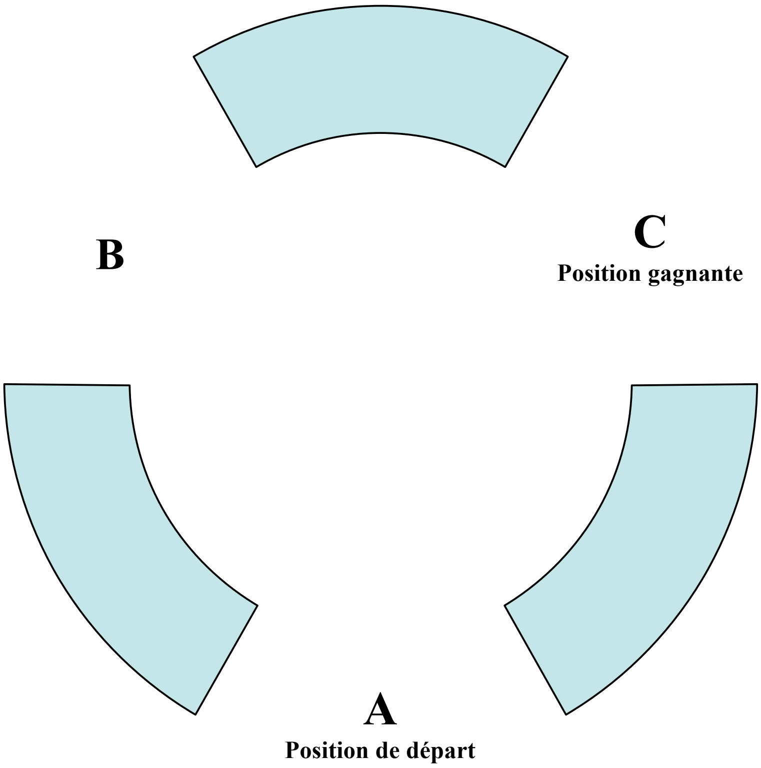
Expérience aléatoire : Tirer successivement et sans remise 2 cartons.
Notons Ω l'univers et A l'événement : « le produit obtenu est négatif ».

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$$

3	5	8	12	7
-1	-2	-9	-4	-6
3	5	8	12	7
-1	-2	-9	-4	-6
3	5	8	12	7
-1	-2	-9	-4	-6

Tourn’en rond

Se munir d'un dé, d'un jeton (une pièce de monnaie peut convenir) et du plateau de jeu ci-dessous.
Place le jeton sur le point A. Un copain te propose deux règles de jeu:



Jeu n° 1	Jeu n° 2
❖ Lance le dé: si tu obtiens 5 ou 6, tourne et déplace le jeton en B; si tu obtiens 1, 2, 3 ou 4, tourne dans l'autre sens et déplace le jeton en C. ❖ Si tu es arrivé en C, tu as gagné la partie en un coup. Si tu es arrivé en B, relance le dé: si tu obtiens encore 5 ou 6, tu arrives alors en C et tu as gagné la partie en deux coups; sinon, tu retournes en A et la partie est perdue.	❖ Lance le dé: si tu obtiens 1, 2, 3, 4 ou 5, tourne et déplace le jeton en B; si tu obtiens 6, tourne dans l'autre sens et déplace le jeton en C. ❖ Si tu es arrivé en C, tu as gagné la partie en un coup. Si tu es arrivé en B, relance le dé: si tu obtiens encore 1, 2, 3, 4 ou 5, tu arrives alors en C et tu as gagné la partie en deux coups; sinon, tu retournes en A et la partie est perdue.

Si tu veux jouer avec ton copain, chacun d'entre vous devra mettre en C une sucette.
Celui qui gagne la partie empoche les deux sucettes.

En supposant que tu es gourmand, quel jeu vas-tu choisir pour t'assurer le maximum de chance de gagner ?

1. **Simulation de l'expérience** (à faire à la maison)

Effectue 40 parties avec le jeu n°1 et note dans le tableau ci-dessous tes 40 résultats en cochant chaque partie dans la bonne case.

Parties gagnées en un seul coup	Parties gagnées en deux coups	Parties perdues
Total n_1 =	Total n_2 =	Total n_3 =

Vérifie que $n_1 + n_2 + n_3 = 40$

Recommence 40 parties avec le jeu n°2 et note dans le tableau ci-dessous tes 40 résultats en cochant chaque partie dans la bonne case.

Parties gagnées en un seul coup	Parties gagnées en deux coups	Parties perdues
Total n_1' =	Total n_2' =	Total n_3' =

Vérifie que $n_1' + n_2' + n_3' = 40$

Quel jeu te paraît le plus favorable après cette simulation ?

2. Exploitation des résultats expérimentaux (étude statistique)

Mettons en commun les résultats de tous les élèves de la classe dans le tableau récapitulatif suivant :

Nom de l'élève	Jeu n°1			Jeu n°2		
	Parties gagnées en un seul coup	Parties gagnées en deux coups	Parties perdues	Parties gagnées en un seul coup	Parties gagnées en deux coups	Parties perdues
Total	$N_1 =$	$N_2 =$	$N_3 =$	$N_1' =$	$N_2' =$	$N_3' =$

On peut vérifier que $N_1 + N_2 + N_3 = N_1' + N_2' + N_3' = 40 \times \mathrm{N}$, si N est le nombre d'élèves de la classe.

A partir de ce tableau, nous allons nous intéresser à la proportion de parties gagnées parmi les parties jouées, que nous appellerons ***la fréquence des parties gagnées***.

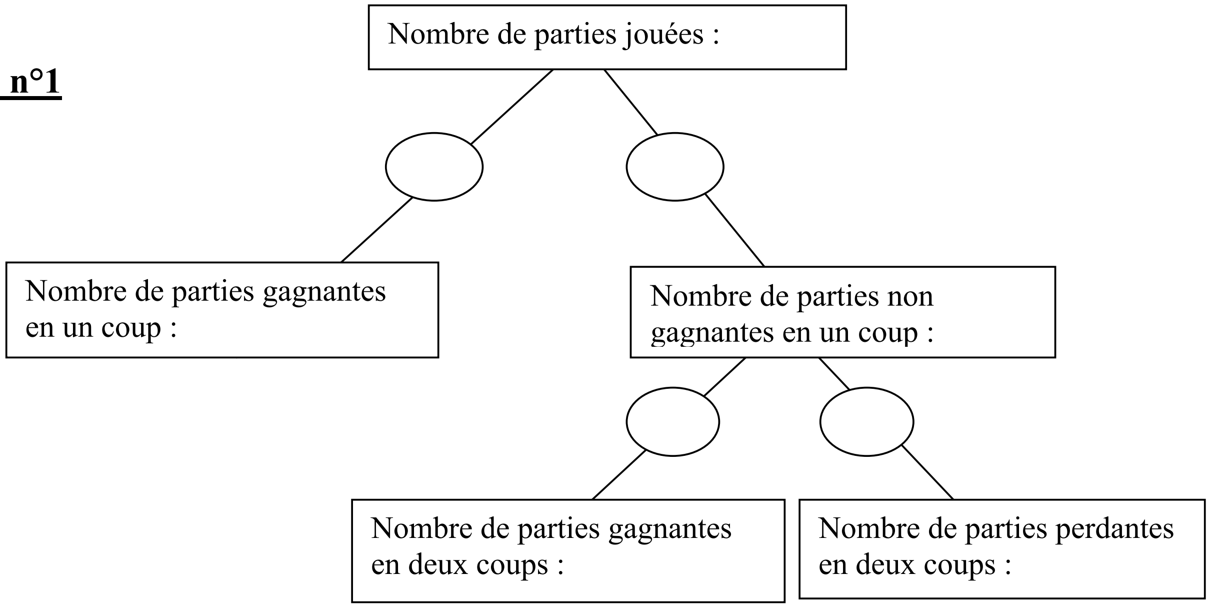
Calculer cette fréquence pour chaque jeu :

$f =$

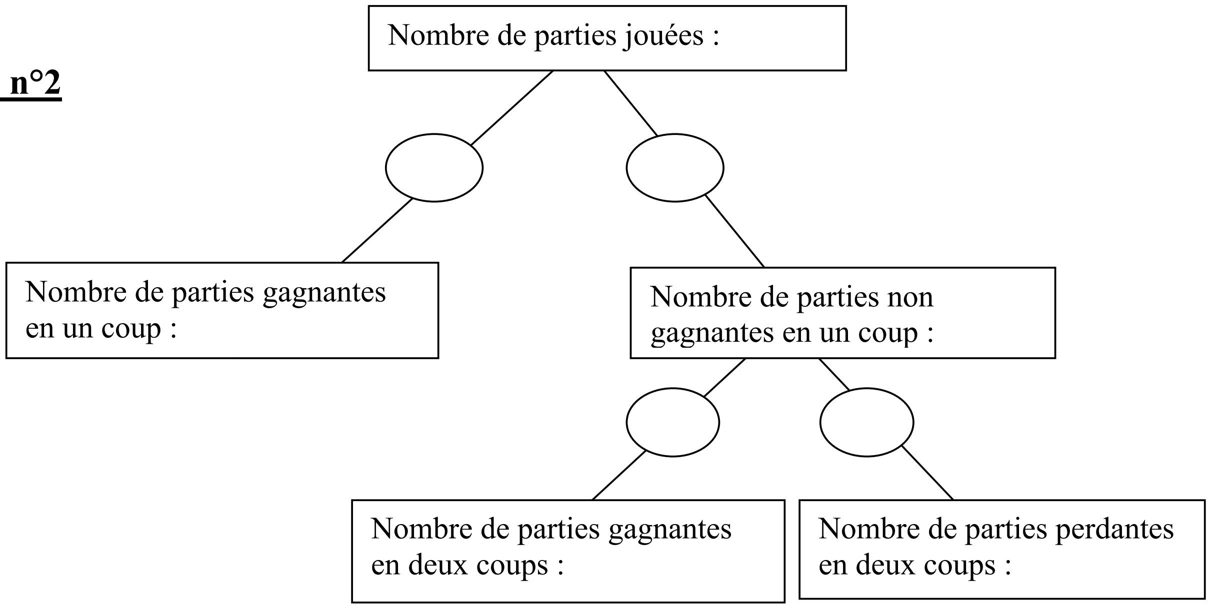
$f' =$

Résumons à présent ces résultats en complétant les schémas "en arbre" ci-dessous. Remplir les rectangles puis indiquer dans les ronds les *fréquences* correspondant à chacune des branches.

<u>Jeu n°1</u>



<u>Jeu n°2</u>



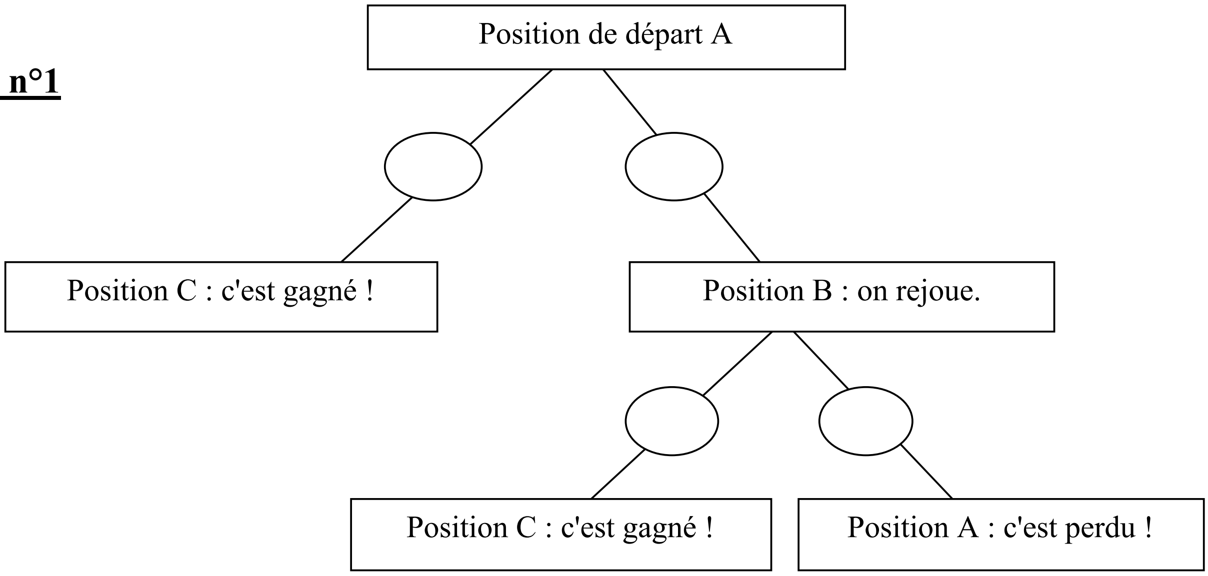
Comment peut-on retrouver *la fréquence des parties gagnées* à chaque jeu, en utilisant uniquement *les quatre fréquences* figurant dans le schéma correspondant ? De la même manière, déterminer *la fréquence des parties perdues*. Quelle relation existe-t-il entre ces deux résultats ?

3. **<u>Mesurer le hasard</u>** (domaine des probabilités)

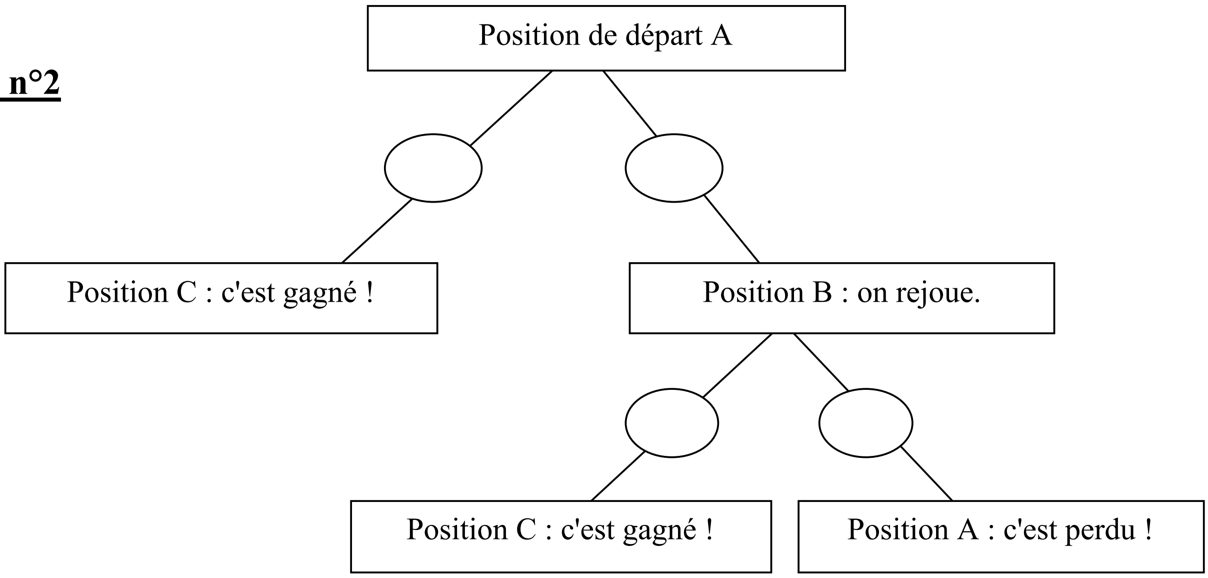
Monsieur Hasardus, savant probabiliste bien connu, prétend qu'il n'était pas nécessaire de réaliser les expériences car "*il est évident que la probabilité de gagner est de 7/9 au jeu n°1 et de 31/36 au jeu n°2 : il suffit de réaliser des arbres similaires aux précédents mais en écrivant des* ***probabilités*** *à la place des fréquences*".

Saurez-vous faire aussi bien que lui?

<u>Jeu n°1</u>



<u>Jeu n°2</u>

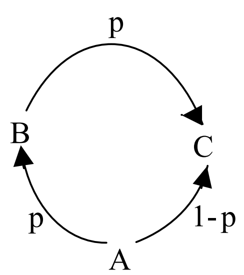


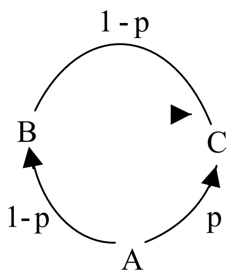
4. **Commentaires et prolongements** (pour le professeur)

- ❖ On peut faire comparer les fréquences expérimentales (déterminées a posteriori) avec les probabilités théoriques (déterminées a priori). La stabilisation autour de la valeur théorique est relativement lente.

- ❖ En exercice ou en contrôle, on peut demander aux élèves de choisir eux-mêmes les faces du dé qui mènent à C puis de faire les calculs correspondants pour déterminer la probabilité de gagner.

- ❖ On peut faire démontrer que, si p désigne la probabilité de tourner d'un cran dans un sens donné, deux jeux "symétriques" donnent la même probabilité de gagner.





En effet, cette probabilité vaut $p^2 + (1-p)$ dans le premier cas et $(1-p)^2 + p$ dans le deuxième.

5. **Bibliographie** : cette activité est inspirée d'une brochure de l'IREM de Strasbourg parue en 1994. ("enseigner les probabilités en classe de Terminale")