Le problème de la télécommande

Durée : ≈ 6h

Connaissances et capacités exigibles :

Connaissances	Capacités
Notion de probabilité	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.

Commentaires :

- La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.).
- La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves.*

Contenu :

I. Mise en oeuvre de la situation
II. Analyse a priori
III. Proposition de « plan » pour l'étude de ce problème
IV. Outils pratiques sur l'utilisation des probabilités
V. Trace écrite a priori sur « les probabilités »

Doc 1 -

Thème : Mise en oeuvre de la situation

Temps de présentation des enjeux de la séance - 5 min *(facultatif si les élèves sont déjà familiarisés avec ce type de problème)*

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves.

- trouver où se situe le problème ? Qu'est-ce qui fait réagir les deux protagonistes ?
- trouver la solution au problème posée et justifier…

Temps de familiarisation avec problème - 5-10 min

Présentation du problème, on visionne plusieurs fois de la vidéo.

Temps de travail par groupe - 30 à 45 min

Phase de recherche par groupe. Les élèves doivent réfléchir ensemble et donner leur avis sur la situation proposée (y a-t-il eu arnaque ou pas). Ils sont autorisés à réaliser l'expérience. Création d'une affiche pour exposer leurs résultats.

Temps de mise en commun et débat - 20-30 min

Chaque groupe présente son affiche. Discussion possibles en fonction des résultats et de la classe.

Temps de synthèse - 10 min

Faire le point sur les méthodes utilisées pour résoudre un problème de probabilité (essais ou dénombrement).

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. A écrire en rouge dans le cahier d'exercice.

Il faut compter 1h30 pour une mise en oeuvre efficace.

Doc 2 -

Thème : Analyse a priori

Enoncé du problème :

http://mathix.org/linux/problemes-ouverts/les-problemes-dudu
Saison 4 - Problème n°5

Résolution du problème

L'univers est constitué ici des issues suivantes : PPP ; PPF ; PFP ; PFF ; FPP ; FPF ; FFP ; FFF. Cet univers est muni de la mesure de probabilité uniforme. Ainsi, si on nomme A l'évènement « toutes faces sont identiques » on conclue que

$$P(A) = \frac{2}{8}.$$

La proposition n'est donc pas équitable !

Analyse des méthodes et procédures

- Réalisation de l'expérience avec un nombre d'essais limités ;
- liste des différents cas possibles avec équiprobabilité ;
- liste des différents cas possibles mais qui ne sont pas équiprobables (source d'erreur!) ;
- utilisation d'un calcul du genre $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2$ issu des probabilités conditionnelles (que l'on peut illustrer à l'aide d'un arbre de probabilité).
- Certains groupes peuvent être convaincus que l'explication donnée dans la vidéo est la bonne.

Les mathématiques travaillées et à travailler

Statistiques:
- définition et calculs de fréquences

Probabilité:
- lien entre fréquences et probabilité (loi forte des grands nombres)
- probabilité uniforme (ou équiprobabilité)
- vocabulaire de base : probabilité, équiprobabilité, issues…

Utilisation du tableur pour les simulations (fonction rand ou alea)

Doc 3 -

Thème : Proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

Etude 1 - Simulation de l'expérience

Il est fort probable qu'un groupe réalise l'expérience. Le nombre de lancé qu'il aura réalisé sera insuffisant pour lui permettre de conclure objectivement (même si ça ne l'empêchera pas de conclure!). On peut donc réaliser l'expérience avec l'ensemble de la classe puis à l'aide du tableur. L'objectif étant de mettre en avant que la fréquence va tendre vers une valeur qui sera la probabilité cherchée.

Etude 2 - Détermination de la probabilité.

On aborde ici le problème d'un point de vue ensembliste en utilisant la mesure de probabilité uniforme. On cherche à vérifier le résultat conjecturé à l'étude 1.
On introduit la situation d'équiprobabilité et la formule qui en permet de calculer les probabilités d'un évènement. Il est également probable que des groupes aient tenté cette piste. IL faut donc s'appuyer sur leur travaux.

Etude 3 - Approfondissement sur les probabilités

Cette partie permet de s'exercer sur des exercices portant sur les exigences du programme et de se préparer au brevet.

Doc 4 -

Thème : Outils pratiques pour l'utilisation des probabilités

Le lancé de dés.

Expérience avec 1 dé:

On lance un dé à 6 faces. Quelles sont les issues possibles à cette expérience ? Y a-t-il une issue plus favorable qu'une autre ?

Expérience avec 2 dés:

On lance deux dés à 6 faces. Quelles sont les issues possibles à cette expérience ? Y a-t-il une issue plus favorable qu'une autre ?

Pour chaque expérience, on pourra proposer une approche par des essais et un calcul de fréquence (à la main et sur tableur). On utilisera le fichier « Doc3_LanceDes.xls » en annexe.

On pourra également proposer une approche probabiliste en utilisant le modèle d'équiprobabilité.

Réponses:
- Lancés de 1 dé: 1/6 dans chaque cas.
- Lancés de 2 dés: on obtient le tableau suivant

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pour 2 et 12 : 1/36 ; pour 3 et 11 : 2/36 ; pour 4 et 10 : 3/36 ; pour 5 et 9 : 4/36 ; pour 6 et 8 : 5/36 et pour 7 : 6/36

Bilan de l'activité :

Le bilan de l'activité doit faire apparaître, entre autre :
- définition d'une expérience aléatoire
- définition d'un évènement
- définition d'une issue
- propriété d'une probabilité (ou d'une fréquence) : fraction ou nombre décimale compris entre 0 et 1
- les probabilités ne sont pas toujours égales

Le lièvre et la tortue

Activité réalisée en salle informatique pour utiliser la simulation sur tableur.

Le problème: un lièvre et une tortue font la course. Cette course peut se simuler avec un dé à 6 faces. On lance au maximum 6 fois le dé. A chaque lancé de dé, la tortue avant d'une case. La ligne d'arrivée est placée 6 cases plus loin. Si le lièvre fait un 6, il gagne la course. Qui a le plus de chance de gagner la course ?

Cette expérience aléatoire sera simulée sur le tableur et les fréquences de réussite de l'un et de l'autre seront étudiées pour en déduire la probabilité.

Le fichier Doc*3_LievreTortue.ods* sera distribué aux élèves.

Il est plus simple d'étudier la probabilité que la tortue gagne la course (5/6)^6 puis d'en déduire celle du lièvre.

Exercices d'applications.

Il sera précisé lors de la résolution des exercices d'entrainement que :
- la situation d'équiprobabilité doit toujours être annoncé en amont pour justifier la formule
- Définition de l'évènement contraire
- la propriété de complémentarité peut être utilisée (P(non(A))=1-P(A))

En rituel

Utilisation des diaporama pour s'exercer à trouver la probabilité dans les cas simples d'équiprobabilité (cf ressource *IREM de Clermont-Ferrand - ex mental*

Le jeu des cartons

Décrit dans le document « Doc3_Exp2Epreuves.pdf ». Il utilise les tableaux doubles entrées

Le Tourn'en rond

Décrit dans le document « Doc3_Exp2Epreuves.pdf ». Il utilise les arbres de probabilités (hors programme)

Doc 5 -

Thème : Trace écrite a priori sur les probabilités

I. Un peu de vocabulaire…

Définitions :

- Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues possibles et que l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel résultat se produira.
- A partir d'une expérience aléatoire, on peut définir ce qu'on appelle des **évènements** qui sont des ensembles de résultats (ou issues) de cette expérience.

Définition *(intuitive)*: Pour certaines expériences aléatoires, on peut déterminer par un quotient la « chance » qu'un évènement a de se produire. Ce quotient est appelé **probabilité** de l'évènement.

Propriété : Si on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de n'importe quel évènement de cette expérience finit par se stabiliser autour d'un nombre qui est la probabilité de cet évènement.

Conséquence : la probabilité d'un « évènement » est toujours **un nombre compris entre 0 et 1**. On peut l'exprimer sous différentes formes (pourcentage, fraction, nombre décimal).

Exemples: *voir les études faites sur les lancés de pièces et de dès dans le cahier d'exercice.*

II. Le cas d'équiprobabilité.

Propriété: Quand les résultats (ou issues) d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité, alors la probabilité d'un évènement est égale au quotient :

$$\boxed{\frac{\text{Nombre de résultats favorables à l'évènement}}{\text{Nombre de résultats possibles}}}$$

Exemple : On lance 1 dé bien équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. On veut connaitre la probabilité que le résultat obtenu après un lancé de dé soit un multiple de 3.

- Nombre de résultats favorables à l'évènement : 2 (les numéros 3 et 6)
- Nombre de résultats possibles : 6
- Probabilité de l'évènement: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Il y a donc « une chance sur trois » que le nombre obtenu soit un multiple de 3.

Conséquence: La somme des probabilités de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Propriété : Si p est la probabilité d'un évènement, alors $1-p$ est la probabilité de l'évènement contraire.

Exemple : Si on reprend la même expérience aléatoire que dans l'exemple précédent, l'évènement contraire serait « le résultat obtenu n'est pas un multiple de 3 ».

Sa probabilité est donc de $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.