Le problème de la photocopieuse

Durée : 4 heures

Connaissances et capacités exigibles :

Connaissances	Capacités
Agrandissement et réduction	Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celles de la figure à obtenir.
Effet d'une réduction ou d'un agrandissement.	- Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, • l'aire d'une surface est multipliée par k^2 , • le volume d'un solide est multiplié par k^3.
Racine carrée d'un nombre positif.	- Savoir que, si a désigne un nombre positif, √a est le nombre positif dont le carré est a et utiliser les égalités: √(a^2)=a, (√a)^2=a. - Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que x^2 = a, où a est un nombre positif.

Commentaires :

- Il s'agit aussi d'entretenir les acquis des années précédentes : aires des surfaces et volumes des solides étudiés dans ces classes.

- Dans le cadre du socle commun, les surfaces dont les aires sont à connaître sont celles du carré, du rectangle, du triangle, du disque et les solides dont les volumes sont à connaître sont le cube, le parallélépipède rectangle, le cylindre droit et la sphère.

Contenu :

I. Mise en oeuvre de la situation
II. Analyse a priori du problème
III. Outils pratiques pour l'agrandissement/réduction
IV. Outils pratiques pour la résolution d'équation du type $x^2 = a$
V. Trace écrite a priori pour l'agrandissement réduction
VI. Trace écrite a priori pour la racine carrée

Doc 1 -

Thème : Mise en oeuvre de la situation

Présentation du problème et recherche individuelle - 5 min.

On distribue aux élèves l'énoncés (en pièce jointe). Lecture individuelle

Reformulation collective du problème - 5 min.

Travail par groupe - 30 min

Durant ce temps, les élèves doivent juste modéliser le problème et y répondre d'une ou plusieurs manières différentes. Il n'y a pas d'affiche à réaliser

Mise en commun - 15 min

L'enseignant est au tableau et récolte les différentes procédures avec les réponses proposées. Il s'en suit une discussion pour valider les différentes procédures

Bilan :

- C'est une situation de proportionnalité
- Sur l'effet d'un agrandissement/réduction sur la mesure d'une longueur d'une figure
- Sur l'effet d'un agrandissement/réduction sur la mesure de l'aire d'une figure
- Sur l'introduction de la racine carrée

Remarque: Il faut compter une heure pour une mise en ouvre efficace. Il n'y a pas beaucoup de diversité des procédures.

Doc 2 -

Thème : Analyse a priori

Enoncé du problème

Ce matin, le professeur de français doit distribuer à ses élèves un poème de Verlaine. Son document est imprimé sur une page de format A4. Pour économiser le papier, il voudrait réduire son document à une demi-page A4. Le bouton « Zoom » de la photocopieuse qui permet une réduction du document lui demande d'entrer un nombre. Peux-tu deviner quel nombre le professeur devra inscrire sur le cadran de la photocopieuse ?

La réponse sera donnée sous forme d'un texte présentant la démarche et les arguments.

L'énoncé complet est en annexe.

Solution du problème

Le nombre à saisir est $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$.

Analyse des méthodes et procédures

- Avec la proportionnalité :

  Une page A4 mesure 29,7 cm par 21 cm et une demi-page A4 (page A5) mesure 21 cm par 14,85 cm. Comme la page A5 est une réduction de la page A4, les mesures des côtés sont proportionnels deux à deux. Le coefficient de proportionnalité est environ $\frac{21}{29,7} \approx 0,707$ ou

  $\frac{14,85}{21} \approx 0,707$

- Avec les aires :

  Deux pages A5 mises côte à côte forment une page A4, donc l'aire d'une page A5 est la moitié de l'aire d'une page A4. Si on note k le coefficient de réduction cherché, on obtient l'égalité suivante :

  $$\mathcal{A}_{A5} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{A4} \Leftrightarrow k \times 29,7 \times k \times 21 = \frac{1}{2} 29,7 \times 21 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2}$$

  Cette équation admet deux solutions : $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $k = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ mais comme un coefficient de réduction est toujours positif, $k = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,707$

Les mathématiques travaillées et à travailler

- Détermination d'un coefficient d'agrandissement/réduction
- Effet d'un agrandissement/réduction sur les aires (et les volumes par prolongement)
- Définition de la racine carrée d'un nombre positif (√(a^2)=a, (√a)^2=a)
- Résolution d'équations du type $x^2 = a$.

Les opérations sur la racine carrée seront étudiées en rituel à la suite de ce problème.

Doc 3 -

Thème : Outils pratiques pour l'agrandissement/ réduction

Rappels sur l'agrandissement et la réduction.

La classe est questionnée sur la grandissement et les réductions, en particulier sur:
- les effets sur les longueurs (lien avec la proportionnalité),
- les effets sur les angles,

le tout, illustré avec un « zoom » d'une figure ou image sur vidéo-projecteur.

Quand est-ce qu'une situation d'agrandissement ou de réduction a été traitée en classe ? *Réponse: lors de l'utilisation du théorème de Thales.*

Travail sous les différentes formes du coefficient d'agrandissement et de réduction (dans les cas où il est supérieur ou inférieur à l'unité) + écriture sous forme de pourcentage (lien avec l'augmentation ou la réduction de a% des longueurs). *Voir exemple de la synthèse de cours.*

Effets sur les volumes.

A l'aide de schéma et d'étude sur les parallélépipèdes rectangles, faire découvrir l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur un volume.

Exercices d'application

…avec calculs de volumes et d'aires pour toutes les figures sauf la sphère et la boule.

Doc 4 -

Thème : Outils pratiques pour la résolution d'équation du type $x^2 = a$

Recherche de solution par essai/erreur

Les élèves vont devoirs trouver le ou les nombres qui, multiplié par eux même donnent : 36; 51,84; 1/4; 0; 3; -5; -8.

Ecrire les équations correspondantes.

Méthodes de résolution

Suivant les valeurs de a présenter les différentes solutions possibles ainsi que la rédaction adaptée.

Exercices d'applications

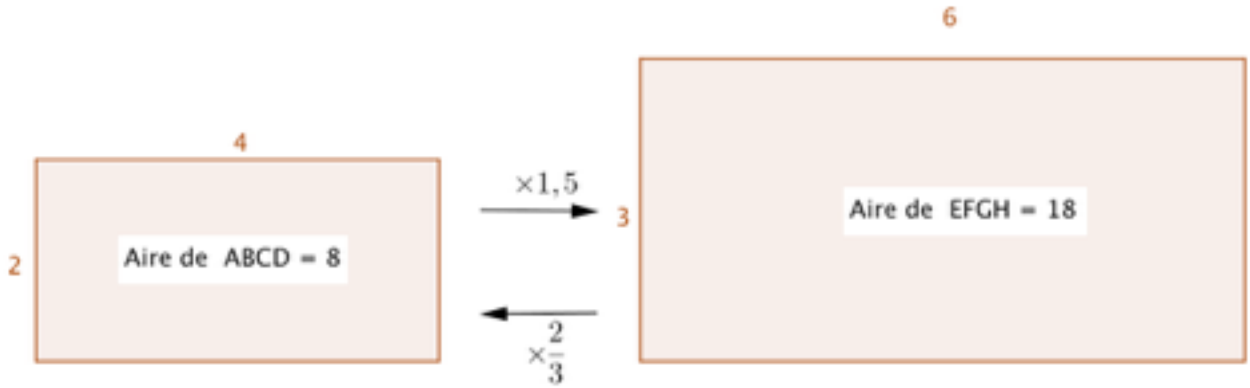
Doc 5 -

Thème : Trace écrite a priori pour l'agrandissement/ réduction

II. Effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires.

Propriété: Quand on agrandit ou on réduit une figure, si les longueurs sont multipliées par un coefficient k , alors l'aire est multipliée par k^2 .

Exemple : Un rectangle qui a une aire de 8 cm² et qui subit un agrandissement de coefficient 1,5 à son aire qui est multipliée par $\boxed{1{,}5^2 = 2{,}25}$, $8 \times 2{,}25 = 18$.



Pour annuler l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction de coefficient k sur une aire, il suffit de multiplier l'aire par $\frac{1}{k^2}$.

III. Effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les volumes.

Propriété: Quand on agrandit ou on réduit une figure, si les longueurs sont multipliées par un coefficient k , alors le volume est multiplié par k^3 .

Exemple : Un parallélépipède rectangle a un volume V de 125 cm³. Chacune des longueurs est multipliée par 2. Quel est le volume du parallélépipède agrandi ?

Les dimensions sont multipliées par 2 (ici $k = 2$) donc le volume est multipliée par 8 (soit $k^3 = 2^3 = 8$). Le volume du parallélépipède rectangle agrandi est donc de 1 000 cm³ (car $125 \times 8 = 1000$).

Doc 6 -

Thème : Trace écrite a priori pour la racine carrée

%%

Cette partie a déjà été abordée par les élèves lors du problème des triangles rectangles entiers

I. La racine carrée: définition.

Définition: Soit *a* un nombre positif. Il existe un nombre positif dont le carré est égal à *a*.
Ce nombre est appelé « **racine carrée de *a*** » et se note $\sqrt{a}$.
Le symbole $\sqrt{\ }$ se nomme « radical ».

Exemples :

- $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$ et 3 est un nombre positif.
- $\sqrt{-4}$ n'existe pas, car il n'y a pas de nombre dont le carré est égal à –4.

%%

Propriété : Quel que soit le nombre positif *a* , on a :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2} = a$$

Exemples :

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 = 8 \quad \text{et} \quad \sqrt{5^2} = 5$$

La racine carrée d'un nombre n'est pas toujours un nombre entier, décimal ou fractionnaire.

II. Les équations du type x²=a.

Propriété : Soit *a* un nombre donné.

- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a une solution : le nombre 0.
- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions :
  - l'une positive : $\sqrt{a}$;
  - l'autre négative : $-\sqrt{a}$.

Exemples:

On considère l'équation $x^2 = 12$.
Comme 12 > 0, l'équation admet deux solutions : $-\sqrt{12}$ et $\sqrt{12}$.

On considère l'équation $x^2 = -4$.
Comme -4 > 0, l'équation n'admet aucune solution.