Les problèmes d’optimisation

Durée : ***problèmes filés***

Connaissances et capacités exigibles :

Connaissances	Capacités
Notion de fonction Image, antécédent, notations f(x), x -> f(x).	- Déterminer l’image d’un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule. - Déterminer un antécédent par lecture directe dans un tableau ou sur une représentation graphique.

Commentaires :

- Les exemples mettant en jeu des fonctions sont **issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires.** Les fonctions linéaires et affines apparaissent alors comme des exemples particuliers de tels processus. L’utilisation des expressions « est fonction de » ou « varie en fonction de », amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et est associée à l’introduction de la notation *f*(*x*). L’usage du tableur grapheur contribue aussi à la mise en place du concept, dans ses aspects numériques comme dans ses aspects graphiques.

- Toute définition générale de la notion de fonction et la notion d’ensemble de définition sont hors programme.

- La détermination d’un antécédent à partir de l’expression algébrique d’une fonction n’est exigible que dans le cas des fonctions linéaires ou affines.

Deux ou trois problèmes d’optimisations seront proposés aux élèves entre-coupés d’autres séquences. A la fin de chaque problème, un bilan sera écrit dans le cahier d’exercice et la ou les trace(s) écrite(s) correspondant au(x) registre(s) utilisé(s) seront collée(s) dans le cahier de cours sous le chapitre « notion de fonction ». Ce(s) même(s) registre(s) seront travaillé(s) à l’aide d’activités complémentaires en fonction des besoins.

Contenu :

Doc 1 -

Thème : La mise en oeuvre des problèmes

Lieu et matériel mis à disposition

Les différents problèmes nécessitent l'usage d'un tableur-grapheur pour trouver les extrema et les points critiques. Les élèves devront donc avoir à disposition un ordinateur ou une tablette. Les lieux adéquates sont :

- la salle informatique
- le CDI (permet de concilier postes informatiques et espaces de travail classiques)
- la salle de classe avec la classe ultra-mobile

Mise en oeuvre :

➡1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 10-15 min)

Temps de présentation des enjeux de la séance

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves.

Rechercher, émettre des conjectures, faire des essais, prendre des initiatives… Une place importante est accordée ici à la preuve des conjectures émises.

Temps de familiarisation avec problème

Présentation du problème, lecture et relecture collective de l'énoncé, explication du vocabulaire.

Temps de recherche individuelle (au moins 5 min)

Appropriation du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

➡ 2ème phase : recherche en groupe (entre 30 min et 1 heure)

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourages à formuler des conjectures, trouver des éléments de preuve, apporter des justifications etc.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

➡ 3ème phase : mise en commun et débat (au moins 30 min)

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

➡ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 10 min)

(A écrire en rouge à la fin de la recherche)

- Dans certaines situations, une grandeur dépend et varie en fonction d'une autre.
- En cas de variation, il peut exister des situations optimales (mais pas forcément).

- Pour analyser cette dépendance ou variation, on peut faire différents essais et tâtonner ou utiliser un tableur / grapheur pour avoir les valeurs numériques que l'on cherche et l'interprétation graphique associée.
- Expression algébrique ou formule utilisée

…

Doc 2 -

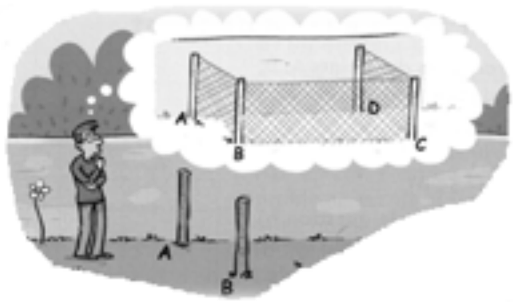
Thème : Le problème de l’enclos

Enoncé :

L’ENCLOS

Ayant trouvé 21 m de grillage dans mon garage, j’ai décidé de les utiliser pour construire un enclos rectangulaire pour mes poules.

Afin d’obtenir un enclos plus grand, j’ai pensé utiliser le mur du jardin qui formerait un côté, le grillage formant les trois autres côtés.



Après avoir placé un premier piquet en A, je m’interroge sur l’emplacement du second piquet (appelé B sur mon croquis) :

- Sa position change-t-elle l’aire de mon enclos ?
- Existe-t-il une position pour le point B où l’aire de l’enclos est la plus grande ?

Solution experte :

Il s’agit d’étudier ici la fonction f définie, sur l’intervalle $[0;10,5]$ par :

$$f(x)=x(21-2x)$$

Une étude des variations de f montre qu’elle admet un maximum en 5,25 et qu’en ce point la valeur de cette fonction est 55,125. Conclusion: L’aire est maximale quand le piquet B est placé à 5,25 m du mur et dans ce cas l’aire est 55,125 m^2.

Analyse a priori des stratégies des élèves :

- Par essais successifs. On arrive facilement à la conclusion que la position du piquet B influe sur l’aire de l’enclos et celle-ci est assez grande s’il est éloigné à 5 m du poteau.
- Modéliser la situation la situation à l’aide d’un tableur en saisissant comme formule « Bi = Ai*(21-2*Ai) ». Le pas de la colonne A est à la charge de l’élève.
- En plus du travail sur le tableur, l’élève peut en faire l’interprétation graphique et visualiser le maximum.
- Utiliser la symétrie: les valeurs extrêmes (0 et 10,5) donnant lieu à des situations identiques, le cas médian (5,25) est optimal (car on se trouve implicitement à étudier une fonction du second degré ayant pour axe de symétrie la droite d’équation x=5,25).

Les mathématiques travaillées ou à travailler :

- production de formules et/ou de méthodes en utilisant le calcul littéral (*expression algébrique d’une fonction*)
- formule d’aire et de périmètre du rectangle
- utilisation du tableur (*tableau de valeurs d’une fonction*)
- utilisation du grapheur *(représentation graphique d’une fonction)**

** ce registre sera normalement moins utilisé par les élèves car la solution décimale reste relativement simple à trouver (5+1/4).*

Doc 3 -

Thème : Le problème de la boite sans couvercle

Enoncé :

- En devoir à la maison à donner la séance précédent la phase de recherche: demander aux élèves de construire à partir d'une feuille A4 le patron d'une boite sans couvercle.

- En classe, exposer quelques exemples de patrons au tableau puis proposer l'énoncé suivant : Comment construire le patron d'une boite sans couvercle, dans une feuille A4, ayant le plus grand volume possible ? Quelles sont ses dimensions ?

Solution experte :

Il s'agit d'étudier ici la fonction f définie, sur l'intervalle $[0;10,5]$ par :

$$f(x) = x(21-2x)(29,7-2x)$$

Une étude des variations de f à l'aide du tableur montre que la fonction admet au maximum aux alentours de 4,042 cm. Dans ce cas, le volume est 1128,4951 cm^3.

Analyse a priori des stratégies d'élèves :

- La méthode par tâtonnement n'est pas forcément la plus naturelle étant donné que le calcul est un peu plus compliqué. Ceci-dit, on trouve facilement que la hauteur de la boite fait varier le volume et que le point critique se trouve entre 4 et 4,1
- Modéliser la situation la situation à l'aide d'un tableur en saisissant comme formule « Bi = Ai*(21-2*Ai)(29,7-2*Ai) ». Le pas de la colonne A est à la charge de l'élève.
- En plus du travail sur le tableur, l'élève peut en faire l'interprétation graphique et visualiser le maximum.

Les mathématiques travaillées et à travailler :

- production de formules et/ou de méthodes en utilisant le calcul littéral (*expression algébrique d'une fonction*)
- formule du volume d'un parallélépipède rectangle et du périmètre d'un rectangle
- utilisation du tableur (*tableau de valeurs d'une fonction*)
- utilisation du grapheur *(représentation graphique d'une fonction)**

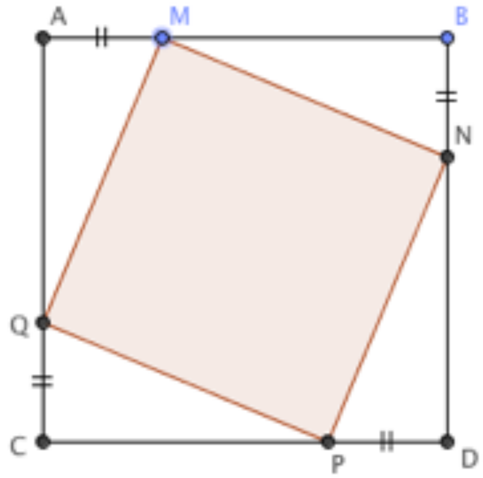
** le point critique de cette fonction n'est pas un nombre décimal, les élèves ne le trouveront pas par essai « à la main » et n'auront qu'une valeur approchée avec le tableur. La représentation graphique leur permettra de conjecturer plus facilement le maximum recherché.*

Doc 4 -

Thème : Le problème du quadrilatère qui tourne

Enoncé

Avec un logiciel :
- on a construit le carré ABCD de côté 4 cm ;
- on a placé un point M mobile sur [AB] et construit le carré MNPQ comme visualisé sur la copie d'écran ci-dessous ;



1. La longueur du segment [AM] modifie-t-elle l'aire du carré MNPQ ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de AM, l'aire de MNPQ est égale à 10 cm² ?
3. Déterminer l'aire de MNPQ lorsque AM est égale à 0,5 cm.
4. Trouver la ou les valeurs de AM pour que l'aire de MNPQ soit minimale. Vous utiliserez la méthode de votre choix.

Solution experte :

On peut facilement utiliser les registres numériques (tableau de valeurs) et graphiques (graphe de la fonction à l'aide de géogébra). Dans tous les cas, la fonction étudiée est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \mathcal{A}_{ABCD} - 4\times\mathcal{A}_{AMQ}\\ &= 4^2 - 4\times\left(\frac{x\times(4-x)}{2}\right)\\ &= 16 - 2x(4-x)\\ &= 16 - 8x + 2x^2\\ &= 2(x-2)^2 + 8\end{aligned}$$

avec $x \in [0;4]$. Ceci prouve que la fonction admet un minimum quand [AM] mesure 2 cm et que ce minimum est 8 cm².

Pour la question 2. La réponse se fait plus naturellement avec un tableau de valeurs et des essais successifs (1 et 3 cm)
Pour la question 3. le calcul est direct une fois la formule trouvée (12,5 cm²).

Analyse a priori des stratégies d'élèves :

- détermination par essais successifs
- utilisation d'un LGD avec modélisation de la situation géométrique
- utilisation d'un tableur-grapheur

Les mathématiques travaillées et à travailler :

- on de formules et/ou de méthodes en utilisant le calcul littéral (*expression algébrique d'une fonction*)
- formule du volume d'un parallélépipède rectangle et du périmètre d'un rectangle
- utilisation du tableur (*tableau de valeurs d'une fonction*)
- utilisation du grapheur *(représentation graphique d'une fonction)**

** Comme le point critique est un nombre entier, l'utilisation du tableur-grapheur ne sera pas nécessaire.*

Doc 5 -

Thème : Ressources sur la notion de fonction

➡ Les 7 familles

Nous sommes des points et nous habitons tous dans le rectangle qui a pour sommet les points suivants : (-7 ; 10) ; (7 ; 10) ; (7 ; -10) ; (-7 ; -10). Tracez-le !

Pour chaque famille étudiée :

1) trouver et placer 4 points de la famille.
2) donner l'adresse de chaque famille sous la forme d'une relation qui lie l'abscisse x et l'ordonnée y des points de la famille.
3) représenter toute la famille.
4) trouver les coordonnées des points qui habitent sur les bords du rectangle.
5) trouver les coordonnées des points qui habitent sur les axes.

Les adresses des 7 familles : (à donner aux élèves au fur et à mesure)

- Famille 1: notre ordonnée est égale à notre abscisse.
- Famille 2: notre ordonnée est l'opposée de notre abscisse.
- Famille 3: en divisant notre abscisse par deux et en retranchant 5 au résultat, on trouve notre ordonnée.
- Famille 4: en multipliant notre abscisse par -3 et en retranchant 7 au résultat, on trouve notre ordonnée.
- Famille 5: notre ordonnée est égale au carré de notre abscisse divisé par 2.
- Famille 6: notre ordonnée est égale au cube de notre abscisse divisé par -4.
- Famille 7: Le produit notre abscisse et de notre ordonnée est toujours égal à 4.

Les élèves vont placer les différentes familles sur le même graphique, où ils auront collé l'énoncé ci-dessus auparavant.

La correction se fera à l'aide de géogébra.

Objectifs :

Travailler les différentes registres (interprétation graphique, expression algébrique, valeurs numériques, langage naturel
Travailler le lien entre les différents registres.
Inclure le vocabulaire officiel (image, antécédent…)

Bilan de l'activité :

- Pour chaque famille, l'abscisse dépend de l'ordonnée. On dit que l'ordonnée est exprimée en fonction de l'abscisse.
- Il existe plusieurs manière de représenter cette dépendance: avec une formule, avec un graphique, avec un tableau de valeurs ou alors avec une phrase.
- … *(en fonction des réactions de la classe)*.

➡ Les boites noires

Voici une activité à faire en exercice rituel pour travailler sur l'expression algébrique d'une fonction à partir de son tableau de valeurs:

Support : utilisation du fichier *.xls* fournit par l'IREM de Paris-Nord.

Réponses :

	Vert	Bleu	Rouge	Noir
Série 1	x -> x + 3	x -> x - 2	x -> 2x	x -> -3x
Série 2	x -> 2x + 1	x -> 3x - 1	x -> 5x - 4	x -> -2x+7
Série 3	x -> 0,5x + 0,5	x -> 0,2x - 0,6	x -> -0,5x + 0,25*	x -> -0,3x - 0,4
Série 4	x -> x^2 + 1	x -> 2x^2 - 3	x -> x^2 + x - 1	x -> 2x^2 - 3x + 1

* problème d'affichage du résultat. A ne pas proposer aux élèves.

Objectifs :
- Conjecturer une formule algébrique pour chaque « boite noire ».
- Manipuler la notation des fonctions.
- Manipuler la notion d'image et d'antécédent dans un registre numérique.

➡ <u>A qui le graphe ?</u>

Voici plusieurs activités à faire en exercice rituel pour travailler l'interprétation graphique de l'évolution d'une grandeur :

http://graphingstories.com : situations réelles avec analyse de l'évolution de grandeurs en fonction du temps. Le but est de tracer le graphe correspondant. En particulier, il est intéressant de travailler ces vidéos :
- **Time:** évolution linéaire
- **Height:** évolution de la hauteur en fonction du temps.
- **Height of Waist Off Ground:** évolution de la hauteur (ref du bassin/taille de l'homme) en fonction du temps
- **Elevation of Plane:** évolution de la hauteur de l'avion en fonction du temps.
- **DISTANCE FROM THE CAMERA:** évolution de la distance de l'homme par rapport à la caméra en fonction du temps.

Pour chaque vidéo (≈ 15 min):
- Faire regarder la vidéo une fois aux élèves (juste le premier essai à vitesse normale)
- Faire construire le graphique vierge demandé
- Visionner de nouveaux la vidéo (préciser aux élèves qu'il s'agit trouver l'allure générale du graphe de la fonction et non d'être super précis).
- Afficher la fin de la vidéo avec la correction.

http://www.experiencingmaths.org : situations déjà modélisés avec analyse de l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre.
- **courbes et volumes:** il s'agit d'associer le graphe (*hauteur en cm en fonction du vol en L*) au récipient correspondant.

  Matériel nécessaire: Les élèves ont à leur disposition une image de chaque récipient ainsi qu'une liste de graphique. Il s'agit donc d'associer le graphique représentant la hauteur d'eau en fonction du volume d'eau. Une animation viendra confirmer ou infirmer le choix du graphique par les élèves.

  Consignes pour les élèves : Ces six récipients ont même hauteur (90 cm) et même volume (90 L). le graphique indique le niveau de remplissage des récipients en fonction du temps.
  Quelle est la courbe de remplissage de chaque récipient ?
- **courbes et vitesse:** Il s'agit de trouver le circuit de course correspondant au graphe proposé.

Doc 6 -

Thème : Proposition d’articulation des différentes ressources

1. **En rituel en amont de cette séquence :** faire l’activité « les boites noires » qui permet de travailler le registre numérique des fonctions et de faire le lien avec l’expression algébrique. Le vocabulaire de base (image et antécédent) ainsi que la notation « f(x)=… » peut être introduise.

2. **Situation problème : le problème de l’enclos**. On établi le lien entre les deux grandeurs à l’aide d’un tableur (registre numérique) et la formule qui permet de le construire directement (registre algébrique).

3. **Les 7 familles :** permet d’aborder le registre graphique de la fonction et de faire le lien avec les deux autres registres. (à commencer en classe puis à distiller en rituels de début d’heure)

4. **Situation problème : la boite sans couvercle.** Peut mettre en avant le registre graphique et permet de faire la synthèse autour de la notion de fonction.

Doc 7 -

Thème : Trace écrite a priori pour la notion de fonction

Définition: Le processus qui à un nombre fait correspondre un unique autre nombre s'appelle une **fonction**.

Les fonctions sont très souvent utilisées pour **étudier le comportement d'une grandeur en fonction d'une autre**.

Il existe 4 moyens de présenter une fonction :

- **Le langage naturel :** la fonction, notée f, est le programme de calcul qui, pour un nombre choisi au départ, associe le produit de ce nombre par la différence de 21 et du double du nombre de départ.

- **L'expression algébrique :** la fonction f est définie par

$$f(x) = \underbrace{x(21-2x)}$$

Antécédent **Image**

où x désigne un nombre qui varie.

- **Le tableau de valeur :**

x (antécédent)	-2	-0,5	0	1	2,5	5	5,25	5,5	10
f(x) (image)	-50	-11	0	19	40	55	55,125	55	10

- **La représentation graphique :**