Cahier d’un élève de la 3ème2

Année 2015-2016

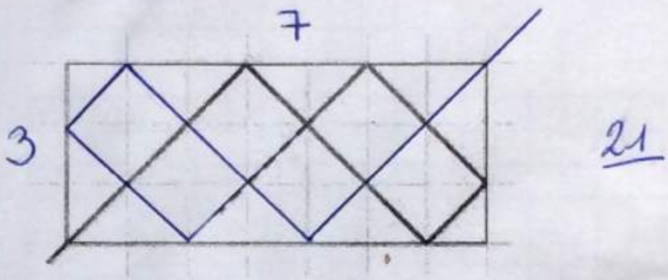
Le problème du billard

Le problème du billard

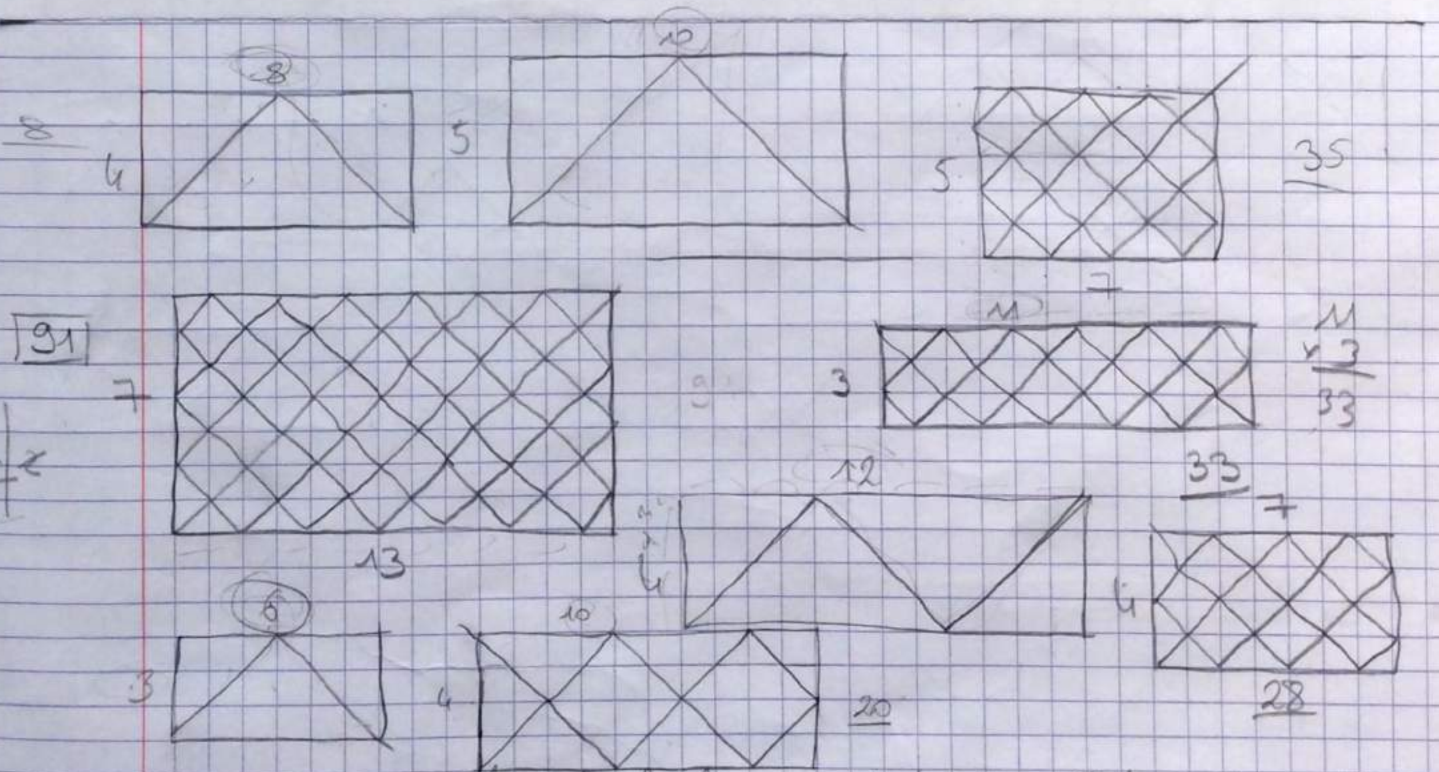
On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).

Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple :

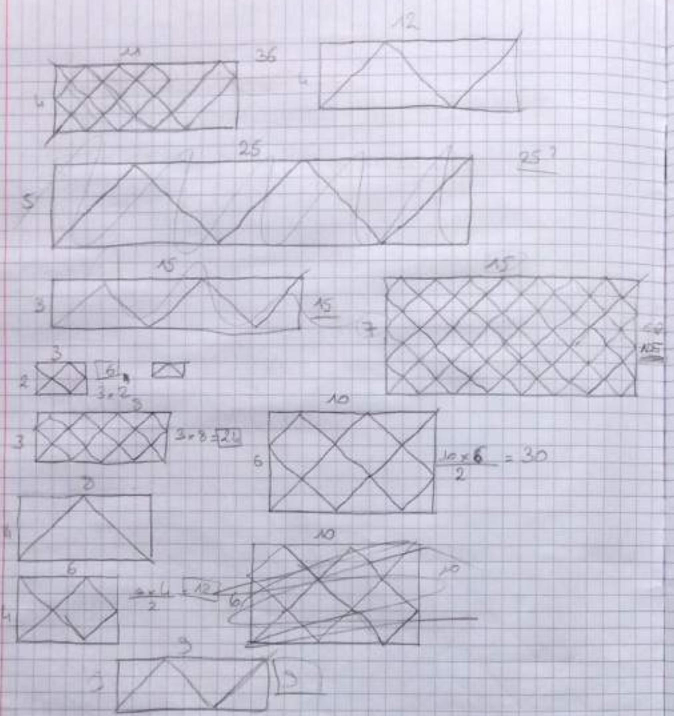


Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction du nombre lignes et du nombre de colonnes ?



Quand le nombre de la longueur est impair, il faut le multiplier avec le nombre de la largeur, qu'il soit pair ou impair.

Quand le nombre de la longueur est pair, c'est le nombre de la longu



<u>Bilan de la recherche</u>

- suivant la taille du billard, la trajectoire du rayon lumineux n'est pas la même
- Les conjectures émises sont :

<u>N°1</u> : Si le billard a un nombre impair de lignes et de colonnes alors tous les carreaux sont traversés.

<u>N°2</u> : Si l'un des deux côtés du billard est impair alors tous les carreaux sont traversés.

<u>N°3</u> : On multiplie tout le temps longueur et largeur pour trouver le nombre de carreaux.

<u>N°4</u> : Si le nombre de colonne est 10, on doit diviser le nombre total de carreaux par 2.

<u>N°5</u> : Si les deux nombres sont impairs et dans la même table de multiplication, alors le nombre de carreaux trouvés est le plus grand des deux nombres.

<u>N°6</u> : Si les deux nombres sont pairs, alors on divise par 2.

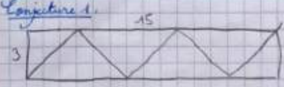
<u>N°7</u> : Si les deux nombres sont pairs, alors

- Si l'un est divisible qu'une fois par 2, alors le nombre de carreaux traversés est la moitié du quadrillage
- Si l'un est divisible 2 fois par 2, alors le nombre de carreaux trouvés est le quart du quadrillage.

<u>Etude 1 : Validation des conjectures.</u>

Pour ne pas valider une conjecture, il suffit de trouver un contre-exemple.

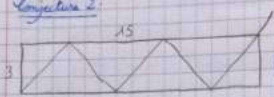
<u>Conjecture 1.</u>



$\boxed{15}$

Tous les carreaux ne sont pas traversés, alors que 15 et 3 sont impairs.

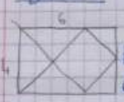
Conjecture 2 :



15 Tous les carreaux ne sont pas traversés alors que 15 est impair.

Rq : 15 est multiple de 3

Conjecture 3 :



12

$6 \times 4 \neq 12$

On ne multiplie pas les 2 nombres.

Conjecture 4 :

20

$\frac{10 \times 4}{2} = 20.$

30

$\frac{10 \times 3}{2} \neq 30$

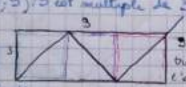
La conjecture est fausse

Conjecture 5 :

12

- (7 ; 21) : 21 est multiple de 7 : 21 carreaux
- (9 ; 15) : 15 n'est pas multiple de 9 (mais 15 et 9 ont un diviseur commun qui est 3).
- (3 ; 9) : 9 est multiple de 3

21

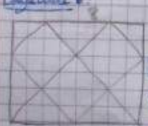


9 carreaux traversés
C'est un exemple

Explication :

Si le nbr de colonnes est multiple du nbr de lignes

Conjecture 6 :



24

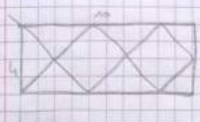
$\frac{8 \times 6}{2} = 24.$

8

$\frac{8 \times 4}{2} \neq 8$

La conjecture est fausse.

Conjecture 7.



$10 = 2$

20.

$\frac{10 \times 4}{2} = 20$

$\frac{18 \times 6}{2} \neq 18$

6 et 18 ne sont divisibles qu'une fois par 2 mais il n'y a que 18 carreaux traversés (au lieu de $\frac{6 \times 12}{2} = 36$).

N° 5 bis : Si deux nombres sont dans la même table de multiplication (multiples l'un de l'autre) alors le nombre de carreaux traversés est le plus grand des deux nombres

↳ conjecture semble être vraie.

Rappels :
- Deux nombres sont multiples l'un de l'autre si l'un est dans la table de multiplication de l'autre.
- Un nombre est le diviseur d'un autre si quand on divise, le résultat est un entier.

↳ Ex. 20 est multiple de 4 car $20 = 4 \times 5$

5 est un diviseur de 20 car $20 \div 5 = 4$.

$\frac{10 \times 2}{2} = 10$

$\frac{14 \times 4}{2} = 28$

(16 ; 18) ou (12 ; 18) sont des contre-exemples pour le second point.

La conjecture n° 7 est fausse.

Etude 2 : Classification des différentes trajectoires

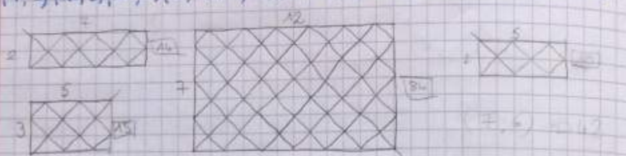
Cas n° 1 : quand le rayon lumineux traverse tous les carreaux.

Cas n° 2 : quand le rayon lumineux rebondit et ne revient jamais en arrière () Ok : quand un côté est multiple de l'autre.

Cas n° 3 : quand le rayon lumineux revient en arrière mais qu'il ne traverse pas tous les carreaux.

Recherche d'une explication pour le cas n°1 :

(7 ; 3) (10, 3) (15 ; 7) (3 ; 8) (7 ; 13) (11 ; 3) (7 ; 4) (7 ; 5) (7 ; 2) (12 ; 7) (5 ; 2)



Exemples cas n°1	Exemples cas n°3
(7 ; 3) (10 ; 3) (15 ; 7) (3 ; 8) (7 ; 13) (11 ; 3) (7 ; 4) (7 ; 5) (7 ; 2) (12 ; 7) (5 ; 2) (7 ; 6) (5 ; 3) 1 est le seul diviseur commun ! Condition pour que tous les carreaux soient traversés	(10 ; 4) (6 ; 4) (8 ; 6) (10 ; 6) (6 ; 3) (12 ; 10) En noir = diviseur commun Plusieurs diviseurs communs : 1, 2, 3... Si les deux nombres ont un diviseur commun différent de 1 et qu'ils ne sont pas multiples alors to les carreaux ne sont pas traversés.

Nombres premiers entre eux : Ce sont des nombres entiers qui ont pour seul diviseur commun 1.

PGCD de deux nombres : Plus Grand Commun Diviseur : C'est le plus grand diviseur commun à deux nombres entiers.

↳ Exemples :
- PGCD (9 ; 15) = 3
- PGCD (6 ; 14) = 2
- PGCD (12 ; 16) = 4
- PGCD (12 ; 18) = 6

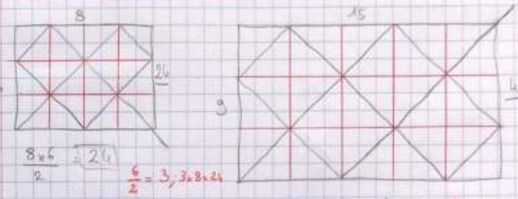
Trouver tous les diviseurs communs :

(12 ; 18) : 1 ; 2 ; 3 ; 6

(21 , 24) : 1 ; 3 ;

(54 ; 72) : 1 ; 2 ; 9 , 3 ; 6 ; 18

Etude 3 : Solution du problème.



45 $\quad \frac{9 \times 15}{2} \neq 45$

$\frac{8 \times 6}{2} = \boxed{24}$

$\frac{6}{2} = 3 ; 3 \times 8 = 24$

PGCD (8 ; 6) = 2

PGCD (15 ; 9) = 3 $\quad \frac{9}{3} = 3 ; 3 \times 15 = 45$

$$\boxed{\frac{l}{PGCD(l;L)} \times L}$$

Cas n°1 :

Si le nombre de lignes et le nombre de colonnes sont premiers entre eux, alors le nombre de carreaux traversés est $\boxed{\text{Nb de lignes} \times \text{Nb de col}}$

Cas n°2 :

Si l'un des deux côtés est multiple de l'autre, alors le nombre de carreaux traversés est $\boxed{\text{le plus grand des deux.}}$

Cas n°3 :

Si les deux nombres ne sont pas premiers entre eux, alors le nombre de carreaux traversés est

$$\boxed{\frac{\text{Nb de lignes}}{\text{PGCD (lignes, colonnes)}} \times \text{Nb de colonnes}}$$

Application : Trouver le nombre de carreaux traversés dans chaque

- (13 ; 7) : PGCD = 1 → Cas n°1 : 13 × 7 = $\boxed{91}$ ✓
- (11 ; 121) : multiples → Cas n°2 : $\boxed{121}$ ✓

- (6 ; 36) : multiples → cas n°2 : $\boxed{36}$ ✓
- (72 ; 64) : PGCD : 8 → cas n°3 : $\frac{72}{8} \times 64 = \boxed{576}$ ✓
- (111 ; 74) : PGCD : 37 → cas n°3 : $\frac{111}{37} \times 74 = \boxed{222}$ ✓

$111 = 3 \times 37$
$74 = 2 \times 37$

Jeu de Juniper-Green.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Pour gagner :
- il faut choisir un nombre premier supérieur à la moitié du nbr maximal
- l'autre joueur est obligé de choisir 1
- il suffit de cocher un autre nombre premier suffisament grand pour bloquer l'adversaire.

Nombre premier : C'est un nombre qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

↳ Ex : 2 ; 3 ; 7 ; 11 ...

Trouver le nombre de carreaux traversés :

(44 ; 88) → 88

(522 ; 348) →

(345 ; 1360) →

(6993 ; 10584) →

Etude 4 : Méthodes de calculs du PGCD

① Décomposition en produit de nombres premiers

522	348
2×261	2×174
$2 \times 9 \times 29$	$2 \times 2 \times 87$
$2 \times 3 \times 3 \times 29$	$2 \times 2 \times 3 \times 29$

Produit de nombres premiers

$PGCD(522 ; 348) = 2 \times 3 \times 29 = 174$

$(522 ; 348) \rightarrow$ cas n°3 : $\frac{522}{174} \times 348 = \underline{1044}$

$(345 ; 1360) \rightarrow \frac{1360}{5} \times 345 = \underline{93\ 840}$

345	1360
3×115	10×136
$3 \times 5 \times 23$	$5 \times 2 \times 8 \times 17$
	$5 \times 2 \times 2 \times 4 \times 17$
	$5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 17$

produits de nombres premiers

$PGCD(345 ; 1360) = 5$

② Algorithme de soustraction

$10\ 584 - 6993 = 3591$
$6993 - 3591 = 3402$
$3591 - 3402 = 189$
$3402 - 189 = 3213$
$3213 - 189 = 3024$
$3024 - 189 = 2835$
$2835 - 189 = 2646$

$2646 - 189 = 2457$
$2457 - 189 = 2268$
$2268 - 189 = 2079$
⋮
$\ldots - 189 = 378$
$378 - 189 = 189$

18 soustractions

$PGCD(10584 ; 6993) = 189$

Calculer le PGCD de 963 et 657.

963 - 657 = 306
657 - 306 = 351
351 - 306 = 45
306 - 45 = 261
261 - 45 = 216
216 - 45 = 171
171 - 45 = 126
126 - 45 = 81
81 - 45 = 36
45 - 36 = 9
36 - 9 = 27
27 - 9 = 18
18 - 9 = 9 ✓
Le PGCD est 9. ✓

③ Algorithme d'Euclide

PGCD (963 ; 657) ?

- 963 | 657
  306 | 1
- 657 | 306
  45 | 2
- 306 | 45
  36 | 6
- 45 | 36
  9 | 1
- 36 | 9
  0 | 4

⇒ PGCD (963 ; 657) = 9

PGCD (1029 ; 1050) ?

- 1050 | 1029
  21 | 1
- 1029 | 21
  0 | 49 ✓

Le PGCD (1029 ; 1050) est 21

PGCD (12 456 ; 2444) ?

- 12 456 | 2444
  236 | 5
- 2444 | 236
  84 | 10
- 236 | 84
  68 | 2
- 84 | 68
  16 | 1
- 68 | 16
  4 | 4
- 16 | 4
  0 | 4 ✓

Le PGCD (12 456, 2444) est 4 ✓

Préparation au brevet.

3 Amérique du Nord • Juin 2013
Exercice 4 • 5 points

Faire des lots identiques de dr

Flavien veut répartir la totalité de 760 dragées au choc
gées aux amandes dans des sachets ayant la même répa
au chocolat et aux amandes.

▶ 1. Peut-il faire 76 sachets ? Justifier la réponse.

▶ 2. a) Quel nombre maximal de sachets peut-il réalise
b) Combien de dragées de chaque sorte y aura-t-il dan

1°/ Non, 1045 n'est pas divisible
(1045 ÷ 76 = 13,75).

2°/ a) On cherche le PGCD de 10
Algorithme d'Euclide :

1045 | 760
285 | 1

760 | 285
190 | 2

285 |
95 |

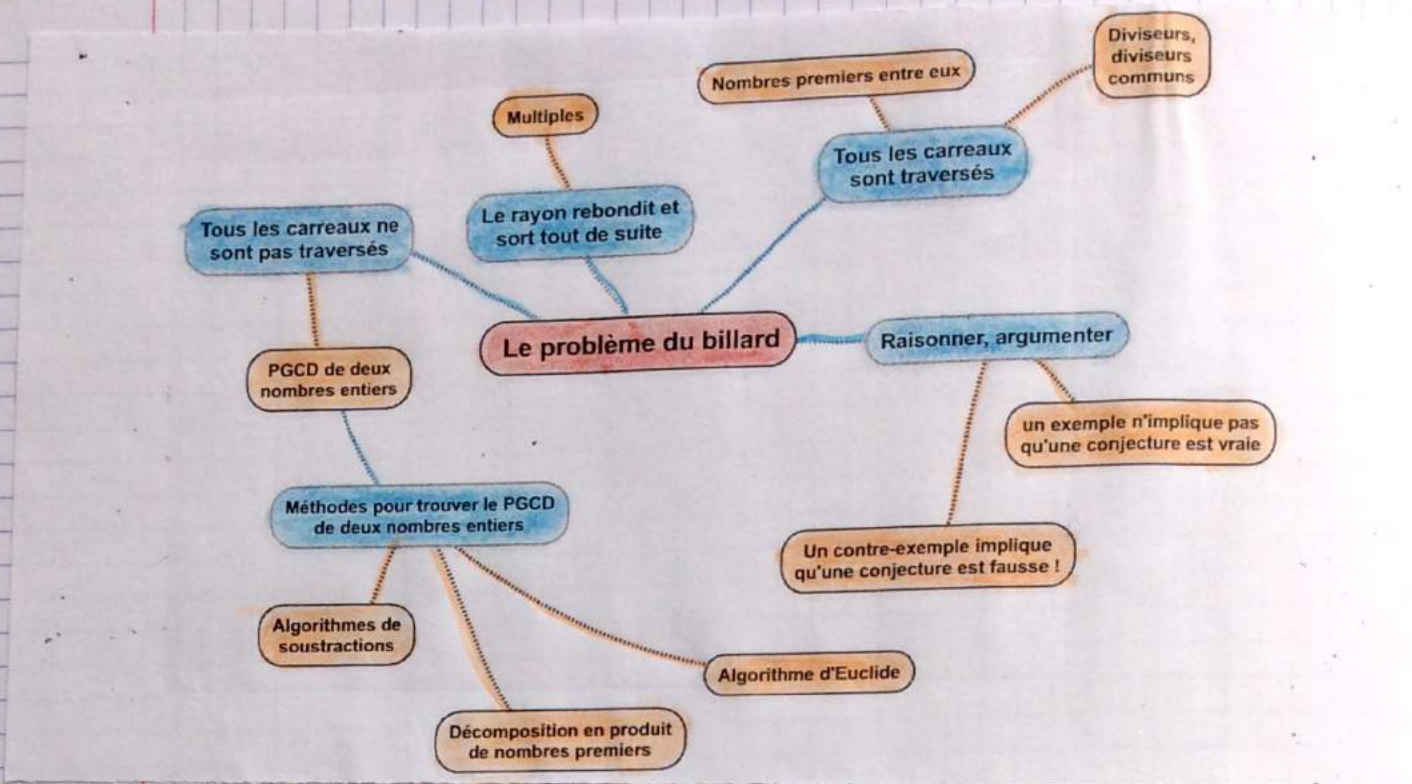
190 | 95
0 | 2

Le PGCD (1045 ; 7

Il peut faire 95 sachets iden

b) 760 ÷ 95 = 8
1045 ÷ 95 = 11

Chaque sachet sera composé de
au chocolat et de 11 dragée
amandes.



Culture et informations mathématiques actuelles

La conjecture de Goldbach est une assertion mathématique **non démontrée** qui s'énonce comme suit :

Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

A l'heure actuelle, personne n'a réussi à démontrer cette conjecture.

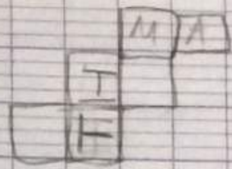
D'autres problèmes plus importants ont une récompense de 1 000 000 $ (voir la liste des problèmes du prix du millénaire)

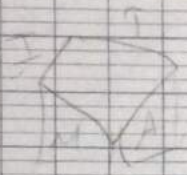
Cahier d'un élève de la 3ème2

Année 2015-2016

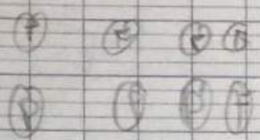
Entraînement rallye

6 Cube et Math





7 Pile ou face



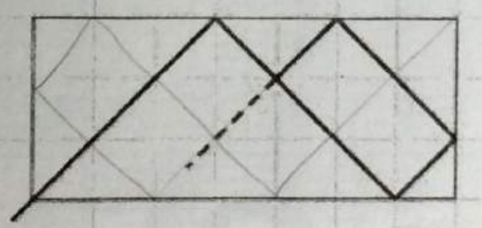
Le Problème du billard

Le problème du billard

On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).

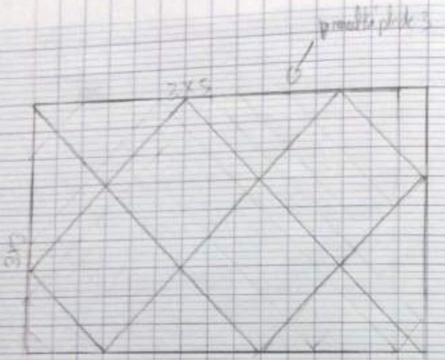
Aux4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple :



Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction du nombre lignes et du nombre de colonnes ?

Le rayon va traversé tous le carreau une fois donc 3 de largeur × 7 de longueur donc = 21



Bilan de la recherche

* suivant la taille du billard la trajectoire du rayon n'est pas la même
* Les conjectures émises sont :

N°1 : Si le billard a un nombre impair de lignes et de colonne alors tous les carreaux sont traversés

N°2 : Si l'un des deux cotés du billard est impair dans tous les carreaux sont traversés.

N°3 : On multiplie tous le temps longueur et largeur pour trouver le nombre de carreaux

N°4 : Si le nombre de colonne est dix, on doit divisés le nombre total de carreaux par 2

N°5 : Si les deux nombres sont impaires et dans la même table de X, alors le nombre de carreaux traversés est le plus grands des deux nombres.

N°6 : Si les deux nombres sont paires, alors on divise par deux.

N°7 : Si les deux nombres sont paires, alors
 - Si l'un est divisible qu'une fois par 2, alors le nombre de carreaux traversés est la moitié des quadrillages.
 - Si l'un est divisible 2 fois par 2, alors le nombre de carreaux traversés est le quart du quadrillage.

Etude 1. Validation des conjectures

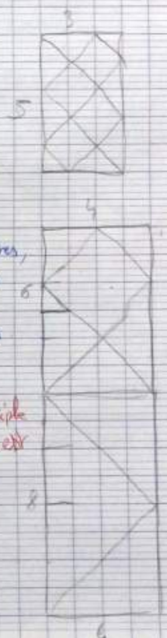
Pour ne pas valider une conjecture il suffit de trouver un contre exemple.

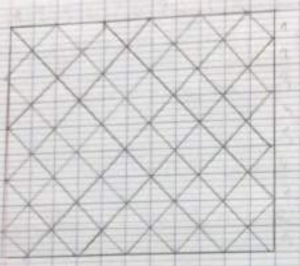
conjecture 1 à 4 :

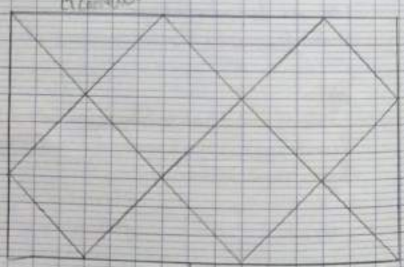
1 il suffit que les côtés soit soit le multiple
2
3 coté paire
4
5 faux 3 larg 5 long ✓
6 faux 4 larg 2 larg

Explication 5 si le nombre est multiple du nombre de lignes, on peut partager le billard en une ligne de carrés égaux (de coté de nombre de ligne) Dans un carré, le nombre de carreaux trouvés correspond à la diagonale

N5 bis
Si deux nombres sont dans la même table de X (multiple l'un de l'autre) alors le nombre de carreaux traversés est le plus grand des deux nombres.







45 carreaux

Etude 2 : Classifications des différentes trajectoires

Cas n°1 quand le rayon lumineux traverse tous les carreaux.

cas n°2 : quand le rayon lumineux rebondit et ne revient jamais en arrière.
(/\/\/) : quand un côté est multiple de l'autre.

cas n°3 : quand le rayon lumineux revient en arrière mais qu'il ne traverse pas tous les carreaux. (X)

Recherche d'une explication pour le cas n°1

Exemple cas n°1	Exemple cas n°3
(3;5) (3;7) (3;11) (5;7)	(6;2) (4;10) (3;15) (12;?) (6;4)
1 1 1 1	1, 2 1, 2 1, 3 1, ? 1, 2
(4;5)	(6;14)
1 1 est le seul diviseur commun	1, 2 en bleu : diviseur commun.

Plusieurs diviseurs communs : 1, 2, 3…

condition pour que tous les carreaux sont traversés

si les deux nombres ont un diviseur commun différent de 1 et qu'ils ne sont pas multiples alors tous les carreaux ne sont pas traversés.

Nombres premiers entre eux : Ce sont des nombres entiers qui ont pour seul diviseur commun 1

PGCD de deux nombres : Plus Grand Commun Diviseur : c'est le plus grand diviseur commun à deux nombres entiers.

↳ Exemples :
- PGCD (3;15) = 3
- PGCD (6;14) = 2
- PGCD (12;16) = 4
- PGCD (12;18) = 6

210

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~
~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	10
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~
~~16~~	17	~~18~~	19	20
~~21~~	22	23	~~24~~	25

1	~~2~~	3	4	~~5~~	6	~~7~~	8	9	10
11	12	13	~~14~~	15	16	17	18	19	20
~~21~~	22	23	24	25	26	27	~~28~~	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

cas n°1 : Si le nombre de lignes et le nombre de colonnes sont premiers entre eux, Alors le nombre de carreaux traversés est $\boxed{\text{Nb de lignes} \times \text{Nb de colonnes}}$

cas n°2 : Si l'un des deux côtés est multiple de l'autre ; Alors le nombre de carreaux traversés est le plus grand des deux.

cas n°3 : Si les deux nombres ne sont pas premiers entre eux ; Alors le nombre de carreaux traversés est $\boxed{\dfrac{\text{Nb de lignes}}{\text{PGCD (ligne ; colonne)}} \times \text{Nb de colonnes}}$

Application : Trouver le nombre de carreaux traversés dans chaque cas :

- (13 ; 7) : 91 carreaux
- (11 ; 121) : **121 carreaux**
- (6 ; 36) : 36 carreaux
- (72 ; 64) : **576 carreaux**
- (111 ; 74) : 222 carreaux

Juniper Green

Pour gagner :
- il faut choisir un nombre premier supérieur à la moitié des nombres maximal.
- l'autre joueur est obligé de choisir 1
- il suffit de choisir un autre nombre premier suffisamment grand pour bloquer l'adversaire

Nombre premier : c'est un nombre qui n'est divisible que par 1 et lui-même.

345
5×69
5×3×23

5×17

1360
5×272
5×2×136
5×2×2×68
5×2×2×2×34
5×2×2×2×2×17

Trouver le nombre de carreaux traversés.

· (41;88) = 88

· (522;348) = 1044

· (345; 1360) : 93 260

· (6993; 10584) :

Etude 4 Méthode de calcule du PGCD

① Décomposer en produit de nombres premiers

522
2×261
2×9×29
2×3×3×29

348
2×174
2×2×87
2×2×3×29

produit de nombres premiers

PGCD = (522 ; 348) = 2×3×29 = 174

② Algorithme de soustraction

PGCD (10 584 ; 69   963   657

963 - 657 = 306
657 - (306 = 351)
~~351 - 306 =~~
~~657 - 351 = 306~~
351 - 306 = 45 = 261 = 216 = 171 = 126 = 81 = 36 = 9 = 27 = 18 = 9 = 0

③ Algorithme d'Euclide

PGCD (963 ; 657) ?

$$\cdot\begin{array}{r|l} 963 & \underline{657} \\ & 1 \\ 306 & \end{array} \quad \cdot\begin{array}{r|l} 657 & \underline{306} \\ & 2 \\ 45 & \end{array} \quad \cdot\begin{array}{r|l} 306 & \underline{45} \\ & 6 \\ 36 & \end{array} \quad \cdot\begin{array}{r|l} 45 & \underline{36} \\ & 1 \\ 9 & \end{array} \quad \cdot\begin{array}{r|l} 36 & \underline{9} \\ & 4 \\ 0 & \end{array}$$

⇒ PGCD (963 ; 657) = 9

1) PGCD (1029 ; 1050) ?
2) PGCD (12456 ; 2444) ?

1) $\begin{array}{r|l} 1050 & \underline{1029} \\ & 1 \\ 21 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1029 & \underline{21} \\ & 49 \\ 0 & \end{array}$ PGCD (1029 ; 1050) = 21

2) $\begin{array}{r|l} 12456 & \underline{2444} \\ & 5 \\ 236 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2444 & \underline{236} \\ & 10 \\ 84 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 236 & \underline{84} \\ & 2 \\ 68 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 84 & \underline{68} \\ & 1 \\ 16 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 68 & \underline{16} \\ & 4 \\ 4 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & \underline{4} \\ & 4 \\ 0 & \end{array}$

PGCD (12456 ; 2444) = 4

3 Amérique du Nord • Juin 2013
Exercice 4 • 5 points

Faire des lots identiques de dragées

Flavien veut répartir la totalité de 760 dragées au chocolat et 1 045 dragées aux amandes dans des sachets ayant la même répartition de dragées au chocolat et aux amandes.

▸ **1.** Peut-il faire 76 sachets ? Justifier la réponse.

▸ **2. a)** Quel nombre maximal de sachets peut-il réaliser ?
b) Combien de dragées de chaque sorte y aura-t-il dans chaque sachet ?

1045 | 760
1
285

190 / 95 / 2

24 Polynésie française • Juin 2013
Exercice 2 • 4 points

Lots de coquillage

▸ **1.** Calcule PGCD (405 ; 315). Précise la méthode utilisée et indique les calculs.

▸ **2.** Dans les bassins d'eau de mer filtrée d'une ferme aquacole de bénitiers destinés à l'aquariophilie, on compte 9 bacs contenant chacun 35 bénitiers de 12,5 cm et 15 bacs contenant chacun 27 bénitiers de 17,5 cm.
L'exploitant souhaite répartir la totalité des bénitiers en des lots de même composition :
par lot, même nombre de bénitiers de 12,5 cm et même nombre de bénitiers de 17,5 cm.
a) Quel est le plus grand nombre de lots qu'il pourra réaliser ? Justifie ta réponse.
b) Quelle sera la composition de chaque lot ?

Préparation au brevet

n°3 1) Non, 1045 n'est pas divisible par 76. (1045 ÷ 76 = 13,75

2) a) On cherche le PGCD de 1045 et 760.
Algorithme d'Euclide

1045 | 760 → 1, reste 285
760 | 285 → 2, reste 190
285 | 190 → 1, reste 95
190 | 95 → 2, reste 0

Le PGCD de 1045 et 760 est 95. Il peut faire 95 sachet identiques.

b) 760 ÷ 95 = 8 chaque sachet sera composé de 8 dragés au chocolat
1045 ÷ 95 = 11 et 11 dragés aux amandes.

n°24 1) 405 | 315 → 1, reste 90
315 | 90 → 3, reste 45
90 | 45 → 2, reste 0

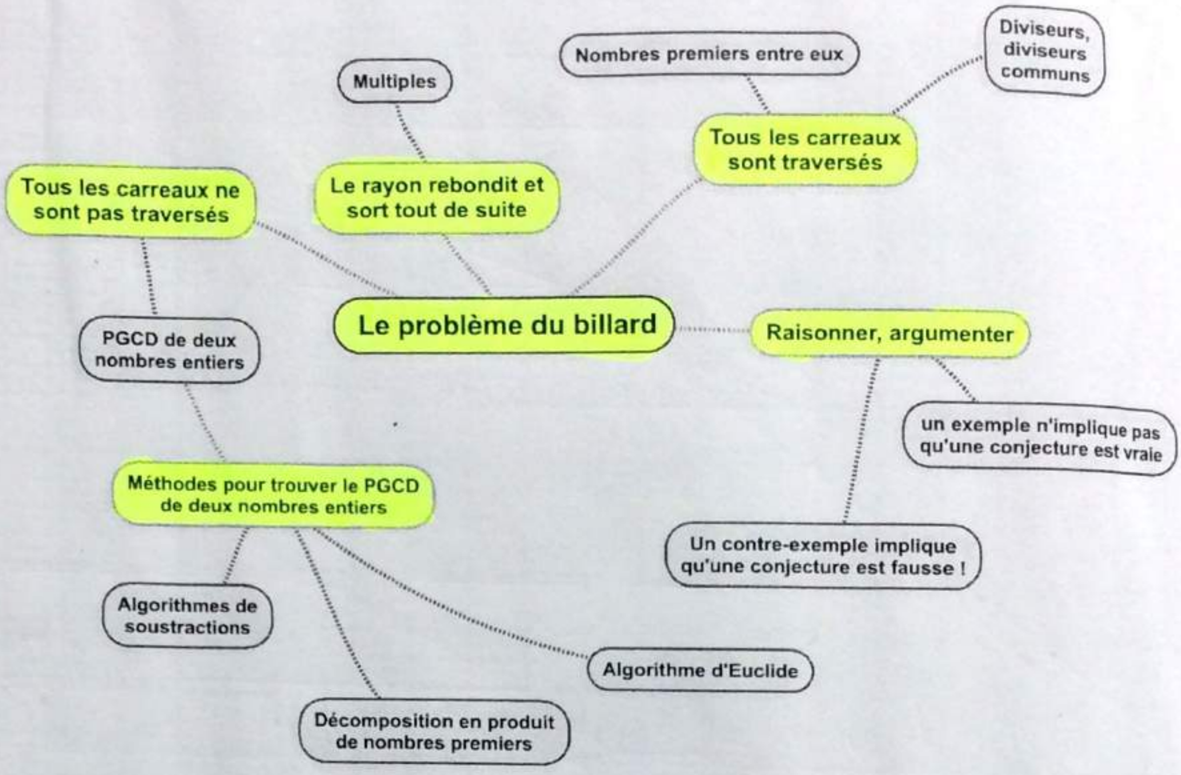
Le PGCD de 405 et 315 est 45. J'ai utilisé la méthode d'Algorithme d'Euclide.

2) 9×35 = 315
15×27 = 405

405 ÷ 45 = 9 45 lots de 9 bénitiers de 17,5 cm et 7 bénitiers de 12,5 cm
315 ÷ 45 = 7

2) a) 9×35 = 315 Il y a 315 bénitiers de 12,5 cm et 405 bénitiers de 17,5 cm.
15×27 = 405
PGCD (315 ; 405) = 45. Il pourra constituer 45 lots.
b) 405 ÷ 45 = 9
315 ÷ 45 = 7 ÷45

cm !



Culture et informations mathématiques actuelles

La conjecture de Goldbach est une assertion mathématique **non démontrée** qui s'énonce comme suit :

Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

A l'heure actuelle, personne n'a réussi à démontrer cette conjecture.

D'autres problèmes plus importants ont une récompense de 1 000 000 $ (voir la liste des problèmes du prix du millénaire)

Cahier d'un élève de la 3ème7

Année 2015-2016

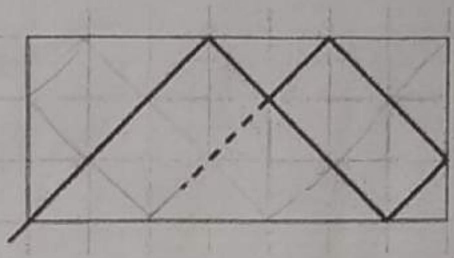
Le problème du billard

Le problème du billard

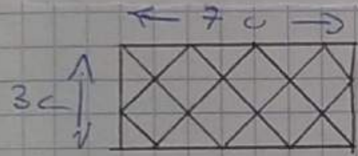
On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).

Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple :

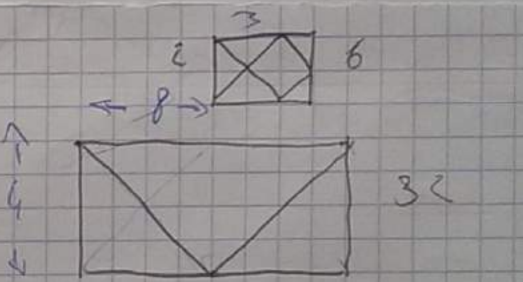


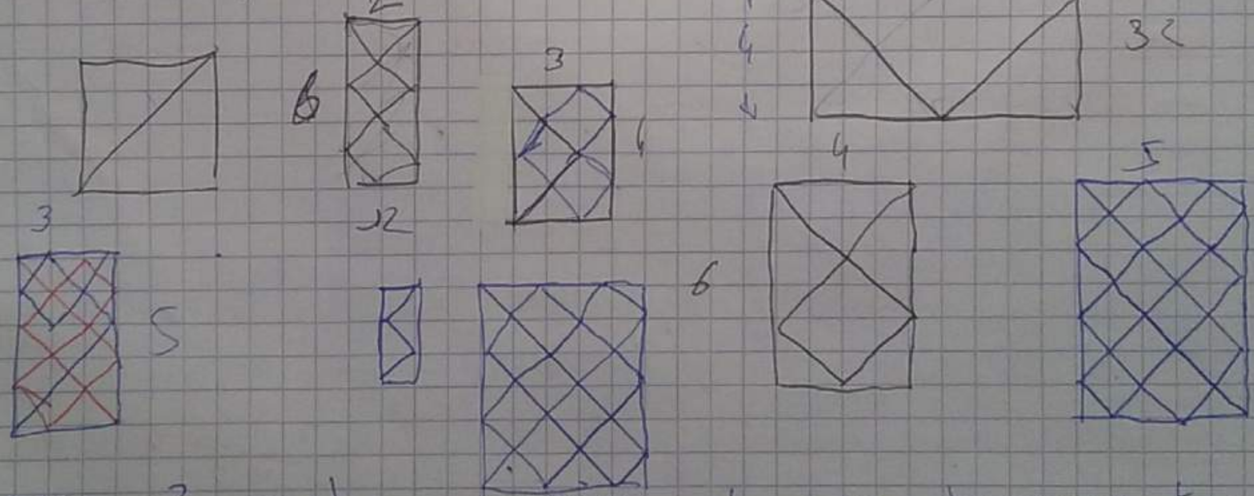
Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction du nombre lignes et du nombre de colonnes ?



7 x 3 = 21

Carreaux traversés = 21

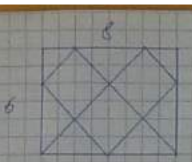




Avec 2 nombres impairs, le rayon traverse tous les carreaux du rectangle. (L x l = nb carreaux traversé)

Avec 2 nombres pairs, (÷ 2)

Avec 1 nombre impair et 1 nombre pair, le rayon traverse tout les carreaux (L x l = nb carreaux traversé)



$6 \times 8 = 48$

24

Si les cotés du rectangle ont un nombre impair de carreaux alors le rayon traverse tous les carreaux. ($L \times l$ = nb carreaux traversés)

Si les cotés du rectangle ont un nombre pair et un nombre impair de carreaux alors le rayon traverse tous les carreaux. ($L \times l$ = nb carreaux traversés)

Si les cotés du rectangles ont un nombre pair de carreaux alors le nombre de carreau est la moitié du nombre de carreaux de l'aire

Bilan de la recherche :

Liste des conjectures émises

N°1 : Si le rectangle a un coté pair et un coté impair alors tous les carreaux sont traversés.

N°2 : Si le rectangle a deux cotés impairs alors tous les carreaux sont traversés

N°3 Si le rectangle a deux cotés pair alors seulement la moitié des carreaux sont traversés

N°4 Le rayon lumineux ne traverse tous les carreaux que si la longueur n'est pas un multiple de la largeur.

N°5 : Si le rectangle a deux cotés pair, alors il faut diviser le plus grand coté par 2 pour trouver le nombre de carreaux traversés

N°6 Si la longueur est multiple de la largeur, alors le nombre de carreaux traversé correspond à la longueur

N°7 Si la longueur est égale à la largeur alors le nombre de carreaux traversés est égal à la longueur

Étude n°1 - Validation des conjectures

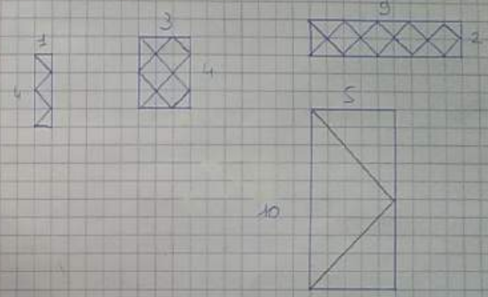
Il est plus facile de montrer qu'une conjecture est fausse.

Pour montrer qu'une conjecture est fausse, il suffit de trouver un CONTRE-EXEMPLE

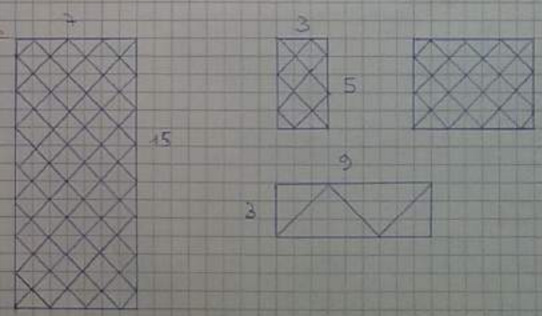
Pour montrer qu'elle est vrai, il faut une méthode qui montre que ça marche tout le temps

⚠ Des exemples ne suffisent pas !

N°1 : Fausse

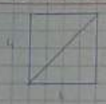


N°2 : Fausse

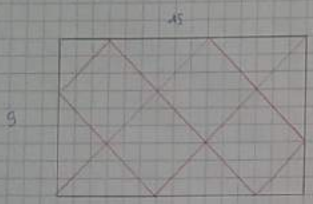


N°3 : Un carré est un rectangle particulier

Fausse



N°4 : Fausse



Multiple : Un nombre est multiple d'un autre s'il est dans la table de multiplication de celui-ci

↳ Ex : 9 est multiple de 3 car $9 = 3 \times 3$

20 est multiple de 4 car $20 = 4 \times 5$

15 n'est pas multiple de 9 $15 \neq 9 \times$ nb entier

$\underbrace{20}_{\text{multiple de 4 et 5}} = \underbrace{4 \times 5}_{\text{diviseurs de 20}}$

Diviseur : Un nombre est un diviseur d'un autre si le résultat de la division est un nombre entier.

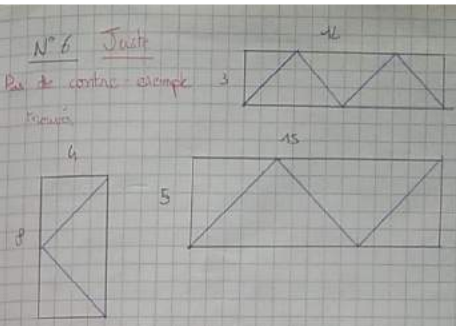
N°5 Fausse

$\ell \div 2 = 4$

Carreaux traversés = 8

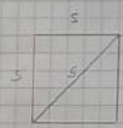
N°6 Juste

Pas de contre-exemple trouvé



N°7 Juste

Pas de contre exemple trouvé



Justification des conjectures 6 et 7

N°7 Si $L = \ell$ ⇒ carré ⇒ le faisceau lumineux traverse la diagonale

⇒ il traverse autant de carreaux que d'un côté.

Conjecture 7 vraie

N°6

Si L est multiple de ℓ

⇒ On peut découper le rectangle en plusieurs parties de taille $\ell \times \ell$

Il y a $L \div \ell$ grand carrés

⇒ Le faisceau rebondit $L \div \ell$ fois

⇒ Il y a L carreaux traversés

Conjecture 6 vraie

Étude n°2 - Classification des trajectoires possibles

1^er^ cas : quand le faisceau traverse le billard en zigzag ⇒ cas où la longueur est multiple de la largeur.

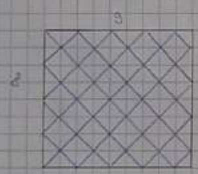
2^ème^ cas : quand le faisceau traverse tous les carreaux ⇒

- si la largeur est 1, alors tous les carreaux sont traversés → VRAI
- si les côtés du billard sont des nombres entiers consécutifs alors tous les carreaux sont traversés
  ↳ semble être vrai

3^ème^ cas : quand le faisceau ne traverse pas tous les carreaux et que la longueur n'est pas multiple de la largeur ⇒

Cas 2 :

Quand les côtés sont consécutifs.



Liste des billards où tous les carreaux sont traversés :
(2 ; 7) ; (3 ; 5) ; (5 ; 9) ; (3 ; 7) ; (4 ; 7) ; (3 ; 11) ; (7 ; 8) ; (12 ; 13) ;
(7 ; 12) ; (5 ; 7) ; (3 ; 13) ; (4 ; 9)

On remarque qu'il y a au moins un impair.
La largeur est la moitié + 1 ou - 1 de la longueur.

Exemples pour le cas n° = 2	Exemples pour le cas n° 3
(2 ; 7) ; (3 ; 5) ; (3 ; 7) ;	(9 ; 15) ; (4 ; 6) ; (6 ; 8)
(4 ; 7) ; (3 ; 11) ; (7 ; 8) ;	(8 ; 12) ; (8 ; 18) ; (10 ; 15)
(12 ; 13) ; (7 ; 12) ; (5 ; 7)	
(3 ; 13) ; (5 ; 9) ; (4 ; 9)	

Cas n° 2 : 1 est le seul diviseur commun aux deux nombres. C'est la condition pour que tous les carreaux soient traversés.

Cas n° 3 : Il y a plusieurs diviseurs communs. C'est la condition pour que tous les carreaux ne soient pas traversés

Nombres premiers entre eux : Ce sont des nombres entiers qui ont pour seul diviseur commun 1

PGCD : Plus grand Commun Diviseur : Le PGCD de 2 nombres entiers c'est le plus grand de tous les diviseurs communs.

↳ Exemples : PGCD (12 ; 10) = 2
PGCD (8 ; 12) = 4
PGCD (12 ; 13) = 1
PGCD (36 ; 27) = 9

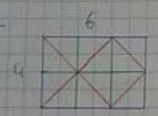
12 et 18 : 1 - 2 - 3 - 6
24 et 21 : 1 - 3
54 et 72 : 1 - 2 - 3 - 6 - 9 - 18 - 4

Etude n°3 Solution du problème

Cas n°1 : Si la longueur est multiple de la largeur alors le nombre de carreaux traversés est la longueur

Cas n°2 : Si la longueur et la largeur sont des nombres premiers entre eux alors le nombre de carreaux traversés est Longueur × Largeur

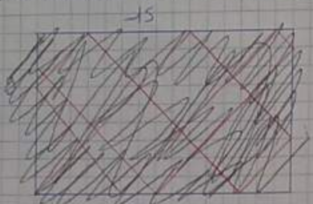
Cas n°3

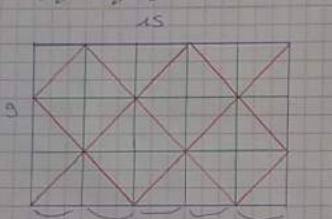


Nb carreaux traversés = 12

Nb carreaux = 24

$\frac{6\,(L)}{2\,(PGCD)} = 3 \; ; \; 3 \times 4\,(\ell) = 12$





Nb carreaux traversés = 45

Nb carreaux = 135

$\frac{15\,(L)}{3\,(PGCD)} = 5 \; ; \; 5 \times 9\,(\ell) = 45$

$\frac{L}{PGCD} \times \ell$

Cas n°3 : Si la longueur et la largeur ne sont pas des nombres premiers entre eux. Alors le nombre de carreaux traversés est $\frac{L}{PGCD} \times \ell$

Dans chacun des cas suivants, quel est le nombre de carreaux traversés ?

- $(6 ; 36) = 36$
- $(81 ; 27) = \frac{81}{9} \times 27 = 243$ 81
- $(30 ; 7) = 210$
- $(11 ; 121) = 121$
- $(111 ; 74) = PGCD(111 ; 74) = 37$
- $(274 ; 9) = 2466$
- $(75 ; 100) = \frac{100}{25} \times 75 = 300$
- $(357 ; 294) = \frac{357}{7} \times 294 = 14994$

Etude n°4 - Méthodes pour trouver le PGCD de deux nombres entiers

1) Décomposition en produit de nombres premiers

357	294
3 × 119	2 × 147
3 × 7 × 17	2 × 3 × 49
	2 × 3 × 7 × 7

produit de nombres premiers

PGCD (357 ; 294) = 3 × 7 = 21

Exemple PGCD(216 ; 126) = 3 × 3 × 2 = 18

216	126
3 × 72	3 × 42
3 × 3 × 24	3 × 3 × 14
3 × 3 × 3 × 8	3 × 3 × 2 × 7
3 × 3 × 3 × 4 × 2	
3 × 3 × 3 × 2 × 2 × 2	

PGCD (252 ; 132) = 12

252

3 x 84

3 x 3 x 28

3 x 3 x 2 x 14

3 x 3 x 2 x 2 x 7

132

3 x 44

3 x 2 x 22

3 x 2 x 2 x 11

PGCD (96 ; 84) = 12

96

3 x 32

3 x 2 x 16

3 x 2 x 2 x 8

3 x 2 x 2 x 2 x 4

3 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2

84

3 x 28

3 x 2 x 14

3 x 2 x 2 x 7

2) Algorithme de soustraction

PGCD (378 ; 108)

378 - 108 = 270

270 - 108 = 162

162 - 108 = 54

108 - 54 = 54

PGCD (378 ; 108) = 54

PGCD (522 ; 348)

522 - 348 = 174

348 - 174 = 17

PGCD (522 ; 348)

PGCD (111 ; 74)

111 - 74 = 37

74 - 37 = 37

PGCD (111 ; 74) = 37

PGCD (963 ; 657)

963 - 657 = 306

657 - 306 = 351

351 - 306 = 45

306 - 45 = 261

261 - 45 = 216

216 - 45 = 171

171 - 45 = 126

126 - 45 = 81

81 - 45 = 36

45 - 36 = 9

36 - 9 = 27

27 - 9 = 18

18 - 9 = 9

PGCD (963 ; 657) = 9

3) Algorithme d'Euclide

963 | 657

306 | 1

657 | 306

45 | 2

306 | 45

36 | 6

45 | 36

9 | 1

36 | 9 ← PGCD (963 ; 657)

0 | 4

PGCD (80 ; 345) = 5

1360 | 345

325 | 3

345 | 325

20 | 1

325 | 20

5 | 16

20 | 5

0 | 4

Préparation au brevet

1) 760 ÷ 76 = 10
1045 ÷ 76 = 13,75

Non car il n'y aurait pas le même nombre dans chaque sachet

3 Amérique du Nord • Juin 2013
Exercice 4 • 5 points

Faire des lots identiques de dragées

Flavien veut répartir la totalité de 760 dragées au chocolat et 1 045 dragées aux amandes dans des sachets ayant la même répartition de dragées au chocolat et aux amandes.

▶ 1. Peut-il faire 76 sachets ? Justifier la réponse.

▶ 2. a) Quel nombre maximal de sachets peut-il réaliser ?
b) Combien de dragées de chaque sorte y aura-t-il dans chaque sachet ?

2 a) PGCD (760 ; 1045) = 95 Algorithme d'Euclide

1045 | 760 → 1, reste 285 760 | 285 → 2, reste 190 285 | 190 → 1, reste 95 190 | 95 → 2, reste 0

b) $\frac{760}{95} = 8$ $\frac{1045}{95} = 11$

Il y aura 8 dragées au chocolat et 11 aux amandes.

24 Polynésie française • Juin 2013
Exercice 2 • 4 points

Lots de coquillage

▶ 1. Calcule PGCD (405 ; 315). Précise la méthode utilisée et indique les calculs.

▶ 2. Dans les bassins d'eau de mer filtrée d'une ferme aquacole de bénitiers destinés à l'aquariophilie, on compte 9 bacs contenant chacun 35 bénitiers de 12,5 cm et 15 bacs contenant chacun 27 bénitiers de 17,5 cm.
L'exploitant souhaite répartir la totalité des bénitiers en des lots de même composition :
par lot, même nombre de bénitiers de 12,5 cm et même nombre de bénitiers de 17,5 cm.
a) Quel est le plus grand nombre de lots qu'il pourra réaliser ? Justifie ta réponse.
b) Quelle sera la composition de chaque lot ?

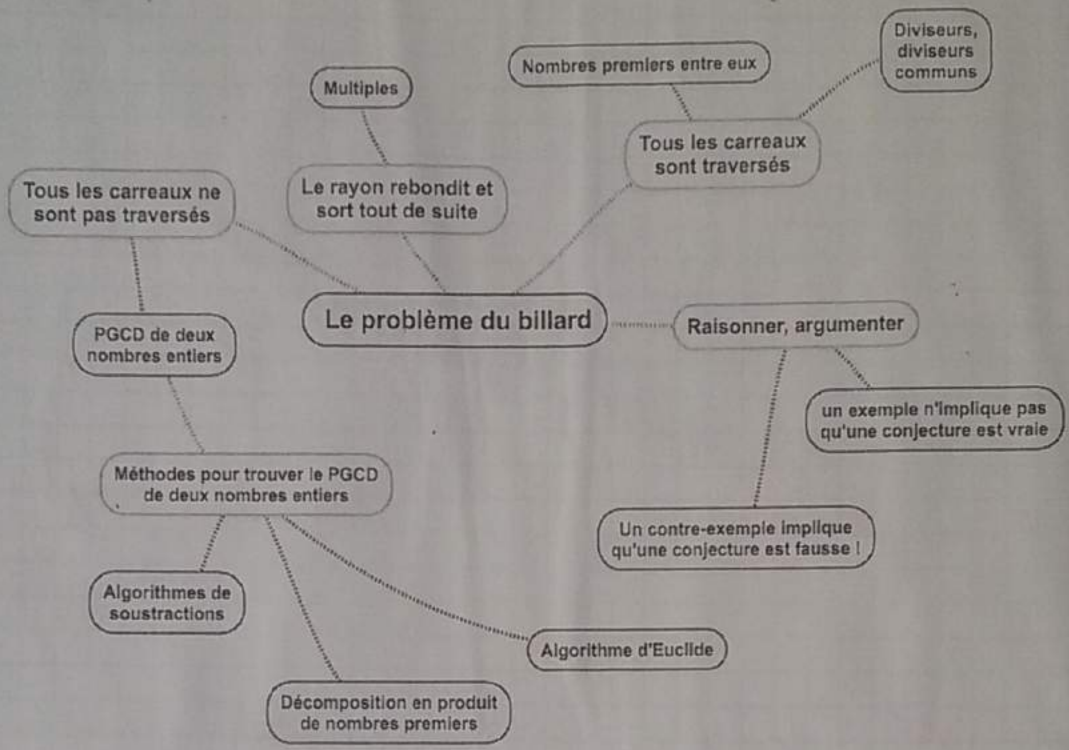
1. J'utilise l'Algorithme d'Euclide

Dividende	diviseur	reste
405	315	90
315	90	45
90	45	0

PGCD (405 ; 315) = 45

2. a) 9 × 35 = 315
15 × 27 = 405
Comme le PGCD de 315 et de 405 est 45, il peut faire 45 lots

b) 405 ÷ 45 = 9
315 ÷ 45 = 7
Chaque lot aura 7 bénitiers de 12,5 cm et 9 bénitiers de 17,5 cm.



Culture et informations mathématiques actuelles

La conjecture de Goldbach est une assertion mathématique **non démontrée** qui s'énonce comme suit :

Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

A l'heure actuelle, personne n'a réussi à démontrer cette conjecture.

D'autres problèmes plus importants ont une récompense de 1 000 000 $ (voir la liste des problèmes du prix du millénaire)