Le problème du billard

Durée théorique : 3 semaines.

Connaissances et capacités du programme potentiellement travaillées :

Connaissances	Capacités
Diviseurs communs à deux entiers, PGCD.	*- Connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux entiers (algorithme des soustractions, algorithme d'Euclide).* *- Calculer le PGCD de deux entiers.* *- Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.*
Agrandissement et réduction	Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et celles de la figure à obtenir.

Commentaires :

- Travail en plus sur les notions de multiples et de diviseurs (rappels des années antérieures)
- Pour le calcul du PCGD, plusieurs méthodes sont possibles. La connaissance de relations arithmétiques entre nombres – que la pratique du calcul mental a permis de développer – permet d'identifier des diviseurs communs de deux entiers. Le recours à une décomposition en produits de facteurs premiers est possible dans des cas simples mais ne doit pas être systématisée. Les tableurs, calculatrices et logiciels de calcul formel sont exploités.
- L'agrandissement/réduction se travail ici que dans le cas particulier du rectangle.
- Des éléments de calcul littéral peuvent apparaitre dans la formulation de conjecture ou de preuve.

Contenu du document :

I. Mise en oeuvre de la situation
II. Analyse a priori
III. Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème
IV. Ressources en arithmétique
V. Trace écrite a priori pour l'arithmétique
VI. Trace écrite a priori pour l'agrandissement/réduction

Doc 1 - Durée: 2 fois 50 min

Thème : Mise en oeuvre de la situation

➡1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 10-15 min)

Temps de présentation des enjeux de la séance

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves.

Rechercher, émettre des conjectures, faire des essais (dessins), prendre des initiatives… Une place importante est accordée ici à la recherche d'éventuels contre-exemples.

Temps de familiarisation avec problème

Présentation du problème, lecture et relecture collective de l'énoncé, explication du vocabulaire.

Temps de recherche individuelle (au moins 5 min)

Appropriation du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

➡ 2ème phase : recherche en groupe (entre 30 min et 1 heure)

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourages à formuler des conjectures, trouver des éléments de preuve, apporter des justifications etc.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

➡ 3ème phase : mise en commun et débat (au moins 30 min)

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

➡ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 10 min)

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les points techniques évoqués par les élèves
- les raisonnements et méthodes utilisés
- les savoirs mathématiques utilisés

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. **A écrire en rouge dans le cahier d'exercice**.

Il faut compter au moins 2 heures pour une mise oeuvre complète

Remarque : Il se peut que le problème n'ait pas été résolu. Ce n'est pas grave, Ce n'est pas grave, la résolution complète se fera au travers des études proposées.

Doc 2 -

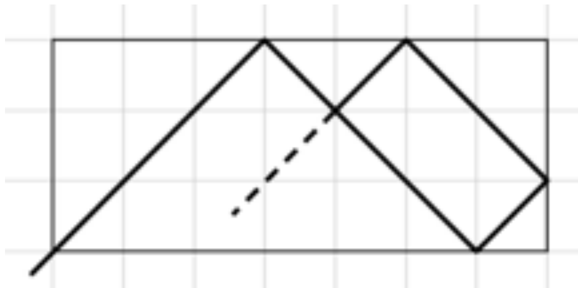
Thème : Analyse a priori de la situation

<u>Enoncé du problème :</u>

On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).

Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple :



Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction du nombre lignes et du nombre de colonnes ?

<u>Solution du problème :</u>

Le nombre de carreaux traversés pour un billard de taille $(m;n)$ est

$$\frac{m \times n}{\mathrm{PGCD}(m;n)} \text{ ou } \mathrm{PPCM}(m;n)$$

Voir le document en annexe.

<u>Analyse des méthodes et procédures.</u>

Voir du document en annexe.

<u>Les mathématiques travaillées et à travailler :</u>

- Rappels sur les multiples et diviseurs
- Introduction et calcul de PGCD (avec les 3 méthodes).
- Notion de nombres premiers entre eux.
- Notion de nombres premiers.
- Utilisation du PGCD pour la simplification de fractions. (A traiter en rituel).
- Rappel sur la définition d'un agrandissement ou d'une réduction d'une figure.

Doc 3 -

Thème : Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

<u>Ce qui peut apparaitre dans le bilan de la recherche</u>

- multitude de conjectures vraies ou fausses (parmi les fausses, les plus aberrantes auront été éliminées lors du débat)
- Des cas particuliers qui vont être mis en évidence (tous les carreaux sont traversés, trajectoire en dents de scie…)
- un peu de vocabulaire (multiple, diviseur…)
- …

<u>Proposition de prolongements, appelés « études » pour travailler le programme à partir de ce bilan.</u>

Etude 1 - Vérification des conjectures émises

Travailler sur le statut de l'exemple et du contre-exemple (première étape dans la démarche de preuve). Recherche des conjectures fausses et des autres (qui semblent être vraies).

Etude 2 - Classification des différentes trajectoires possibles

Séparation en 3 cas:
- Cas n°1: Qd tous les carreaux sont traversés
- Cas n°2: Qd le rayon rebondit mais ne revient jamais en arrière
- Cas n°3: Quand le rayon revient en arrière mais que tous les carreaux ne sont pas traversés

Les cas n°1 et 2 sont souvent déjà cités dans les conjectures proposées. Le cas n°3 englobe les deux autres et sera la solution du problème

Etude 3 - Solution du problème

On utilise les cas n°1 ou 2 pour démontrer le cas n°3. La démonstration utilisée se fait à partir d'un exemple générique. Ce type de preuve est à manipuler avec prudence avec les élèves (pour ne pas faire de raccourcis du genre : exemples = preuves)

Etude 4 - Entrainement : résolution de problème en arithmétique.

Exercices d'applications (simplification de fractions, recherche des diviseurs communs, calculs de PGCD…), jeux ou problèmes de brevet

Doc 4 -

Thème : Ressources en arithmétiques

➡ **<u>Recherche de diviseurs.</u>**

Activité : le jeu de Juniper-Green

Principe du jeu : Le jeu d'origine se joue à deux (voir la variante "défi" pour jouer seul ou en équipe), avec un plateau composé des 25, 50 ou 100 premiers nombres entiers et selon les règles suivantes :
- le premier joueur coche un nombre.
- chaque joueur coche un nombre parmi les multiples ou les diviseurs du nombre choisi par son adversaire au coup précédent.
- un joueur est déclaré gagnant si son adversaire ne peut plus jouer

Une quatrième règle souvent utilisé dit que le premier nombre choisi doit être pair (ou plus simplement, ne doit pas être premier). Elle est souvent utilisée, car le premier joueur pouvait facilement bloquer son adversaire en jouant un nombre N : nombre premier supérieur à Nmax/2, obligeant son adversaire à jouer 1, puis en rejouant un nombre premier supérieur à Nmax/2. Ainsi il était sur de gagner.

Les 3 grilles :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le défi : C'est une variante du jeu à deux (voir Bulletin vert de L'APMEP n°427). Le but n'est plus de bloquer un adversaire, mais d'arriver à cocher le plus possible de nombres sur le plateau. Un tableau situé en bas de cette page attend vos records.

Sources :

http://www.acamus.net/index.php?option=com_content&view=article&id=32:le-jeu-de-juniper-green&catid=41&Itemid=219

https://fr.wikipedia.org/wiki/Juniper_Green_(jeu)

➡ **Introduction du PGCD par la décomposition en produit de facteurs premiers.**

Activité 1: (40 min) **Le jeu de Pénélope**.

On part d'un nombre, 24 par exemple, et on lui applique les règles de transformations suivantes :

Règle 1 : A chaque ligne, le produit doit contenir un nombre de plus qu'à la ligne précédente. Lorsqu'on est sûr de ne plus pouvoir continuer, on utilise la règle 2.

Règle 2 : A chaque ligne, le produit doit contenir un nombre de moins qu'à la ligne précédente ; d'autre part, on ne doit pas retrouver une décomposition déjà écrite.

Exemple :

$$\begin{gathered} 24 \\ 3 \times 8 \\ 3 \times 2 \times 4 \\ 3 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 6 \times 2 \times 2 \\ 12 \times 2 \\ 24 \end{gathered}$$

Première phase : (5 min)

L'enseignant écrit au tableau, devant les élèves et sans rien dire :

$$\begin{gathered} 24 \\ 3 \times 8 \\ 3 \times 3 \times 4 \\ 3 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 6 \times 2 \times 2 \\ 12 \times 2 \\ 24 \end{gathered}$$

Il demande alors aux élèves de faire des hypothèses sur les règles qu'il a utilisées pour construire cette suite.

Les remarques des élèves permettent de préciser les règles du jeu qui sont alors écrites au tableau :

- On part d'un nombre et on lui applique les règles de transformation précédentes.
- A chaque ligne, on a toujours une écriture du même nombre, le nombre de départ.
- Le nombre 1 ne figure pas.

Deuxième phase: (5 min)
Comparaison de différentes décomposition.

La classe sera divisée en 4 partie, chaque partie se concentrant sur deux décompositions proposées autour du même nombre de départ.

Exemple :

72	72	72	72	72
$2 \times \mathbf{36}$	$\mathbf{3} \times \mathbf{24}$	$\mathbf{4} \times \mathbf{18}$	$\mathbf{6} \times \mathbf{12}$	$\mathbf{8} \times \mathbf{9}$

Chaque élève utilise successivement les règles 1 et 2 à partir de la décomposition donnée.

Mise en commun: (10 min)
Au tableau, les différentes décompositions sont proposées. Les conjectures:
- même nombre d'étapes à chaque fois.
- La ligne centrale est la même (<- liste des diviseurs premiers).

Synthèse orale: (5 min)
- Nombre premier.
- Décomposition en produit de facteurs premier.

Troisième phase: (15 min)
- Trouver la décomposition en produit de facteur premier des nombres 36 et 42.
- Quels sont les diviseurs communs (différents de 1) à 36 et 42 ?
- Quel est le plus grand diviseur commun à 36 et 42 ?

36	42
2 x 18	7 x 6
2 x 2 x 9	7 x **2 x 3**
2 x **2 x 3** x 3	

Les diviseurs communs sont: 2, 3, 6.
Le plus grand diviseur commun est 6.

Activité 2: (15 min) **Le plus grand diviseur commun.**

- Trouver la décomposition en produit de facteur premier des nombres 54 et 72.
- Quels sont les diviseurs communs (différents de 1) à 54 et 72 ?
- Quel est le plus grand diviseur commun à 54 et 72 ?

54	72
6 x 9	8 x 9
2 x 3 x 9	2 x 4 x 9
2 x 3 x 3 x 3	2 x 2 x 2 x 9
	2 x 2 x **2 x 3 x 3**

Les diviseurs communs sont: 2, 3, 6, 9, 18.
Le plus grand diviseur commun est 18.

Activité 3: (15 min) **Interprétation graphique (pavage du rectangle)**.

On a un rectangle de longueur 12 et de largeur 8. Quelle est la taille maximale des carrés que l'on peut utiliser pour quadriller ce rectangle ?

Même question avec un rectangle de longueur 36 et de largeur 42 ?

Même question avec un rectangle de longueur 7 et de largeur 5 ?

Synthèse orale:
- Interprétation graphique des diviseurs communs et du PGCD (partage des côtés).
- Nombres premiers entre eux et PGCD.

➡ **<u>Méthodes pour le calcul du PGCD de deux nombres entiers naturels.</u>**

On cherche le PGCD de 378 et 108.

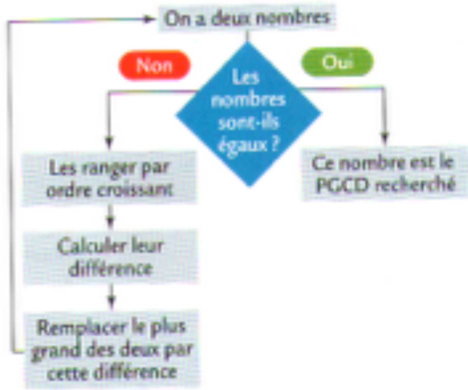
1ère phase: décomposition en produit de facteurs premiers.

378	108
2 x 189	9 x 12
2 x 9 x 21	3 x 3 x 3 x 4
2 x 3 x 3 x 3 x 7	**3 x 3 x 3 x 2** x 2

Le PGCD de 378 et 108 est 2 x 3 x 3 x 3 = 54.

2ème phase : Algorithme de soustraction.

Utiliser l'algorithme ci-contre pour 378 et 108.

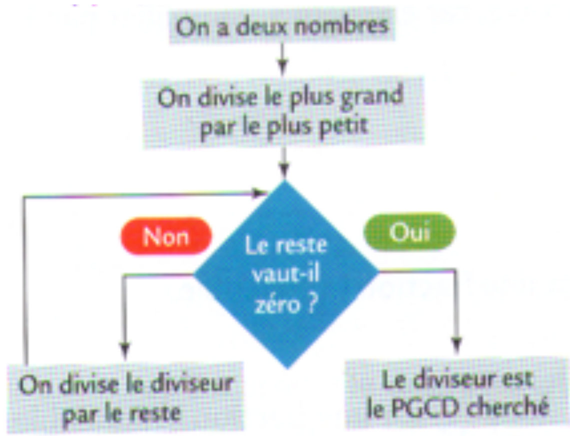


$$378 - 108 = 270$$
$$270 - 108 = 162$$
$$162 - 108 = 54$$
$$108 - 54 = 54$$

Le PGCD de 378 et 108 est 54.

3ème phase : Algorithme d'Euclide.

Utiliser l'algorithme ci-contre pour 378 et 108.



378 = 108 x 3 + 54

108 = 54 x 2 + 0

Le PGCD de 378 et 108 est 54.

Présentation sous forme de tableau ou de division posée

Doc 4 -

Thème : Trace écrite a priori pour l'arithmétique

I. Vocabulaires d'arithmétique.

Définitions: Soient n et m deux nombres entiers.
- On dit que n **divise** m si le résultat de la division $m \div n$ est un nombre entier.
- On dit également que n est un **diviseur** de m ou que m est **divisible** par n.
- On dit également que m est un **multiple** de n, c'est-à-dire que m est dans la table de multiplication de n.

Définition: On appelle un **diviseur commun**, un nombre entier qui divise plusieurs nombres.

Exemples :
- 3 est un diviseur commun à 15 et 24 car 3 divise 15 et 3 divise 24 ($15 = 3 \times 5$ et $24 = 3 \times 8$).
- 7 est un diviseur commun à 14 et 56 car 7 divise 14 et 7 divise 56 ($14 = 7 \times 2$ et $56 = 7 \times 8$).
- 1 est un diviseur commun universel car il divise tous les nombres entiers.

Définition: Deux nombres entiers sont dits **premiers entre eux** s'ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemples :
- 15 et 22 sont premiers entre eux car ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1 : les diviseurs de 15 sont 1, 3, 5 et 15 et les diviseurs de 22 sont 1, 2, 11 et 22.
- 15 et 21 ne sont pas premiers entre eux car 3 est un diviseur commun.

Définition: Un **nombre premier** est un nombre dont les seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Remarque: Le nombre 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.

Exemples :
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ... sont des nombres premiers.
- 24, 6, et 8 ne sont pas des nombres premiers.

II. Le Plus Grand Commun Diviseur.

Définition : On appelle **PGCD**, le plus grand diviseur commun à deux nombres entiers. Le PGCD de deux nombres entiers est supérieur ou égal à 1 (car 1 divise tous les nombres).

Exemple : Le PGCD de 21 et 35 est 7 car:
- les diviseurs de 21 sont : 1, 3, 7 et 21 ;
- les diviseurs de 35 sont : 1, 5, 7 et 35 ;
- 7 est le plus grand diviseur commun à 21 et 35.

Propriété : Si le PGCD de deux nombres est égal à 1, alors les deux nombres sont premiers entre eux.

III. Les méthodes pour calculer le PGCD de deux nombres entiers.

a. La décomposition en produit de nombres premiers.

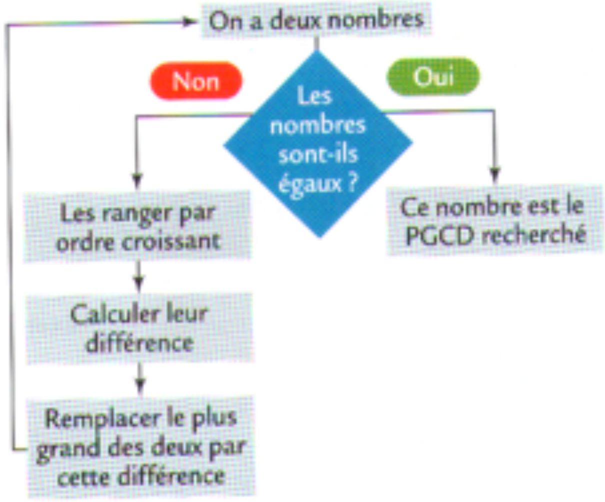
Cette méthode est utile quand les nombres étudiés sont « petits ». Il faut :
- décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers ;
- chercher le plus grand diviseur commun aux deux décompositions.

Exemple : Le PGCD de 24 et 36 est 6 car:
- $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$
- $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
- $2 \times 3 = 6$ est le plus grand nombre qui divise 24 et 36.

b. L’algorithme de soustraction.

Cette méthode est parfois longue mais fonctionne sur des « grands » nombres.

Description de l’algorithme.



Exemple : On cherche le PGCD de 378 et 108.

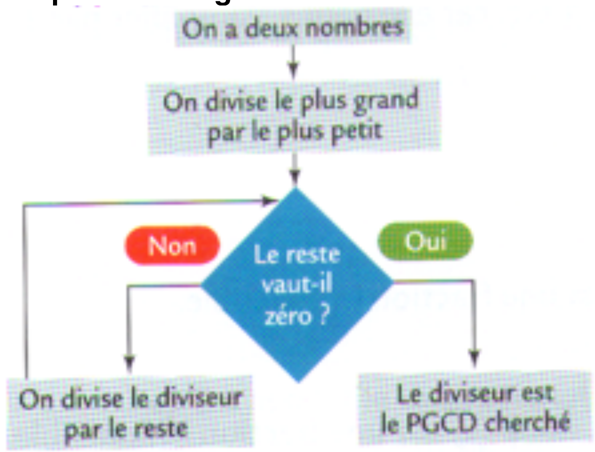
$$378 - 108 = 270$$
$$270 - 108 = 162$$
$$162 - 108 = 54$$
$$108 - 54 = 54$$

Le PGCD de 378 et de 108 est 54.

c. L’algorithme d’Euclide.

Cette méthode est fonctionne sur des « grands » nombres et améliore l'algorithme de soustraction. Ainsi, c’est le plus pratique à utiliser.

Description de l’algorithme :



Exemple : On cherche le PGCD 2 277 et 1 449.

Dividende	diviseur	Reste
2 277	1 449	828
1 449	828	621
828	621	207
621	207	0

Donc le PGCD de 2 277 et de 1 449 est 207.
En effet,

$$1449 \div 207 = 7 \quad \text{et} \quad 2\,277 \div 207 = 11$$

Dans la pratique, l’algorithme d’Euclide est le plus rapide à utiliser pour des grands nombres.

Doc 5 -

Thème : Trace écrite a priori pour agrandissement / réduction

I. Rappels

Définition : Un **agrandissement** (ou une **réduction**) d'une figure est un zoom (ou un rétrécissement). Cette transformation **ne change pas les angles** et rend les longueurs de la figure agrandie **proportionnelles** à celles de la figure initiale.