Cette situation connexe retrace une réflexion qui, à partir du problème dit « des fractions égyptiennes », m'a mené à retrouver une démonstration d'un Théorème de Kepler concernant les pavages archimédiens.

Retour aux Situations Connexes

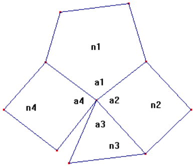
Suite

Peu avant d'aborder le problème dit « des fractions égyptiennes », j'avais assisté à une présentation d'André Deledicq concernant les pavages archimédiens.

La question qui m'avait à l'époque interpellé lors de l'exposé était le nombre de tels pavages.

Dans la suite, le mot pavage sera pris en son sens le plus intuitif : juxtaposition de polygones, sans vide, ni recouvrement, sans non plus qu'aucun sommet ne se trouve sur le côté d'un polygone.

Nous considérons ici des pavages tels que la configuration autour de chaque sommet soit la même et appellerons pavages semis-réguliers (ou archimédiens) les pavages où, en plus, les pièces sont toutes des polygones réguliers.



Autour d'un nœud d'un tel pavage on a la relation :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 2\pi$$

où k est le nombre de polygones et donc de secteurs angulaires autour d'un nœud et où a_i est la mesure en radian d'un des i secteurs.

Par ailleurs, si n_i est le nombre de cotés du polygone régulier i , on a :
$a_i = \dfrac{n_i - 2}{n_i}\pi = (1 - \dfrac{2}{n_i})\pi$, et donc la relation précédente devient :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$$

Retour aux Situations Connexes   Suite

Cette relation fournit une condition nécessaire (autour d'un nœud) pour l'existence de pavages archimédiens. On reconnaît ici une expression semblable à celles déjà étudiées.

En particulier pour $k = 4$: $\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} + \dfrac{1}{n_4} = 1$

La suite de l'étude consiste donc à étudier les n-uplets solutions de telles équations, en s'appuyant sur les méthodes déjà utilisées, et ceci de façon exhaustive, pour déterminer l'ensemble des pavages archimédiens.

Retour aux Situations Connexes   Suite

Avant d'aller plus loin faisons deux remarques :

Pour les assemblages de polygones réguliers autour d'un nœud :

- On ne peut placer moins de 3 polygones réguliers ;
- On ne peut avoir autour d'un point plus de 6 polygones convexes ;

Le premier point est clair, le deuxième presque autant.

En effet on a : $a_i \geq \frac{\pi}{3}$ donc :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \frac{\pi}{3} k$$

et puisque :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 2\pi$$

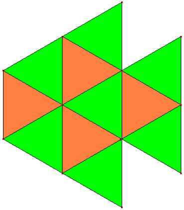
Alors on a : $2\pi \geq k\frac{\pi}{3}$ et $k \leq 6$.

Nous chercherons donc des assemblages avec 3, 4, 5 ou 6 polygones.

Commençons donc par essayer de placer 6 polygones réguliers.

S'il existe un des a_i strictement supérieur à $\dfrac{\pi}{3}$ alors la somme des a_i sera strictement supérieur à 2π ce qui ne peut être.

Il n'y a donc qu'une seule possibilité pour assembler six polygones,



c'est d'essayer avec 6 triangles équilatéraux.

Et ceci convient, il suffit de faire le dessin.

Il y a donc un unique pavage semi-régulier avec 6 polygones autour des nœuds ... et il est régulier.

Puisque nous sommes partis avec 6, continuons avec 5.
La relation :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$$

s'écrit donc :

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

et nous recherchons des quintuplets $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ solutions, avec : $3 \geq n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq n_5$.

◂ Retour aux Situations Connexes
▸ Suite

- Essayons tout d'abord avec les n_i les plus petits c'est à dire avec les plus grandes fractions :
  $\frac{3}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + R$ avec R $= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
  soit $\frac{3}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ et on obtient le 5-uplet (3,3,3,3,6)
- et petit à petit nous diminuons les n_i
  soit $\frac{3}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
  et on obtient le 5-uplet (3,3,3,4,4)
  et on s'arrête car $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq 4$
- Puis : $\frac{3}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + (\frac{3}{2} - \frac{11}{12}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{7}{12} =$
  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + (\frac{7}{12} - \frac{1}{4})$ qui ne convient déjà pas et idem ensuite.
- et $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ ne permettra plus d'atteindre $\frac{3}{2}$

Conclusion : pour $k = 5$, nous n'avons que deux candidats (à une permutation près).

Nous allons reprendre la même démarche pour les cas suivants et d'abord $k = 4$ et $\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} + \dfrac{1}{n_4} = 1$:

- $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$ et on obtient le 4-uplet (3,3,4,12)
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15}$ qui ne convient pas
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ et on obtient le 4-uplet (3,3,6,6)
  - et on s'arrête là car $\frac{1}{3} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq 6$
- $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + (1 - \frac{7}{12}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} =$
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + (\frac{5}{12} - \frac{1}{4})$ et on obtient le 4-uplet (3,4,4,6)
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{13}{60}$ qui ne convient pas
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$ qui ne convient pas et on s'arrête là.

- $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + (1 - \frac{8}{15}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{15} =$
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + (\frac{7}{15} - \frac{1}{5})$ qui ne convient pas
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{10}$ qui ne convient pas et on s'arrête là
- $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} =$
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})$ qui ne convient pas et on s'arrête là
- $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$
  on obtient (4,4,4,4) et on s'arrête là

Conclusion : pour $k = 4$, nous n'avons que quatre candidats (à une permutation près) : (3,3,4,12) (3,3,6,6) (3,4,4,6) (4,4,4,4)

Terminons avec trois polygones, $k = 3$ et $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$:

- $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + (\frac{1}{6} - \frac{1}{7})$ et on obtient le triplet (3,7,42)
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + (\frac{1}{6} - \frac{1}{8})$ et on obtient le triplet (3,8,24)
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + (\frac{1}{6} - \frac{1}{9})$ et on obtient le triplet (3,9,18)
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + (\frac{1}{6} - \frac{1}{10})$ et on obtient le triplet (3,10,15)
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + (\frac{1}{6} - \frac{1}{11})$ qui ne convient pas
  - $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + (\frac{1}{6} - \frac{1}{12})$ et on obtient le triplet (3,12,12)
  - et $n \geq 12$ ne convient plus
- $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$
  - $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5})$ et on obtient le triplet (4,5,20)
  - $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6})$ et on obtient le triplet (4,6,12)
  - $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{7})$ qui ne convient pas
  - $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8})$ et on obtient le triplet (4,8,8)
  - et $n \geq 8$ ne convient plus

- $\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10}$
  - $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + (\frac{3}{10} - \frac{1}{5})$ et on obtient le triplet (5,5,10)
  - $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + (\frac{3}{10} - \frac{1}{6})$ qui ne convient pas
  - $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + (\frac{3}{10} - \frac{1}{7})$ qui ne convient pas
  - et $n \geq 7$ ne convient plus

- $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ on obtient le triplet (6,6,6) et on s'arrête

Conclusion : pour $k = 3$, nous avons dix candidats (à une permutation près) :

$(3, 7, 42)(3, 8, 24)(3, 9, 18)(3, 10, 15)(3, 1, 12)(4, 5, 20)(4, 6, 12)(4, 8, 8)(5, 5, 10)(6, 6, 6).$

Retour aux Situations Connexes
Suite

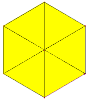
Conclusion temporaire :
la condition nécessaire portant sur l'assemblage de polygones réguliers autour d'un nœud en vue de la réalisation d'un pavage nous amène à considérer a priori $1 + 2 + 4 + 10$ n-uplets, mais il ne faut pas oublier que des permutations sont possibles.

En réalité nous avons à faire pour l'instant à 21 assemblages.

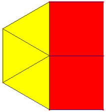
Nous les présentons sur les pages suivantes avant de chercher une autre condition nécessaire qui permettra de réduire encore ce nombre de candidats potentiels avant de passer aux vérifications de la possibilité de pavage.

Retour aux Situations Connexes

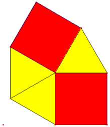
Suite



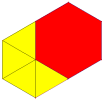
(3,3,3,3,3,3)



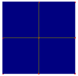
(3,3,3,4,4)



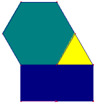
(3,4,3,3,4)



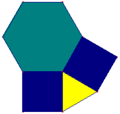
(3,3,3,3,6)



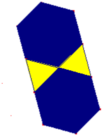
(4,4,4,4)



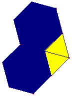
(3,6,4,4)



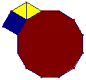
(3,4,6,4)



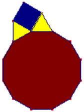
(3,6,3,6)



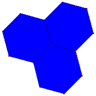
(3,3,6,6)



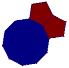
(3,3,12,4)



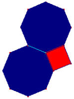
(3,4,3,12)



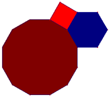
(6,6,6)



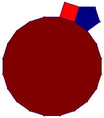
(5,5,10)



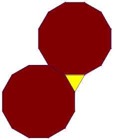
(4,8,8)



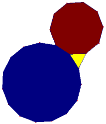
(4,6,12)



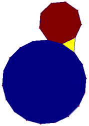
(4,5,20)



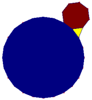
(3,12,12)



(3,10,15)



(3,9,18)

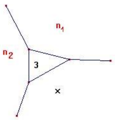


(3,8,24)

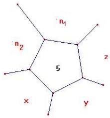
(3,7,42)

Retour aux Situations Connexes
Suite

Plutôt que de tester tous les cas remarquons les conditions nécessaires supplémentaires suivantes :
pour un pavage archimédien dont l'un des nœuds est codé $(3, n_1, n_2)$ les nœuds proches sont codés $(3, n_2, n_1)$ et on fait le tour avec $(3, n_1, n_2)$, ce qui impose $n_1 = n_2$.



Et autour d'un pentagone : Il en est de même si l'un des nœuds est codé $(5, n_1, n_2)$, les proches sont codés $(5, n_2, n_1), (5, n_1, n_2), (5, n_2, n_1)$ et on finit le tour avec $(5, n_1, n_2)$, ce qui impose $n_1 = n_2$.



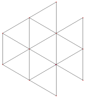
Conclusion : on ne retient les candidats pavages contenant un codage $(3, n_1, n_2)$ ou $(5, n_1, n_2)$ que si $n_1 = n_2$. On élimine donc (5,5,10), (4,5,20), (3,10,15), (3,9,18), (3,8,24), (3,7,42).

Ceci restreint alors le nombre de candidats. Il nous en reste 15 :

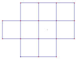
(3,3,3,3,3,3) , (3, 3, 3, 3, 6) , (3, 3, 3, 4, 4) et (3, 3, 4 ,3, 4) , (3, 3, 4, 12) et (3, 4, 3, 12) , (3, 3, 6, 6) et (3,6,3,6) , (3, 4, 4, 6) et (3, 4, 6, 4) , (4, 4, 4, 4) , (3, 12, 12) , (4, 6, 12), (4, 8, 8) , (6, 6, 6).

Il reste à éliminer (3, 3, 4, 12) , (3, 4, 3, 12) , (3, 3, 6, 6) , (3, 4, 4, 6) , en vérifiant qu'apparaissent assez vite, lors d'un essai de pavage, des nœuds incompatibles et à construire les 11 pavages semis-réguliers (dont trois réguliers) qui suivent :

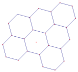
◂ Retour aux Situations Connexes   ▸ Suite



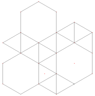
(3,3,3,3,3,3)



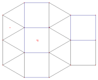
(4,4,4,4)



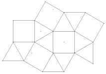
(6,6,6)



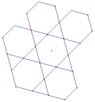
(3,3,3,3,6)



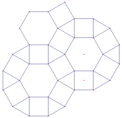
(3,3,3,4,4)



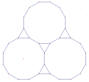
(3,3,4,3,4)



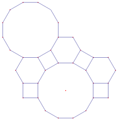
(3,6,3,6)



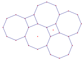
(3,4,6,4)



(3,12,12)



(4,6,12)



(4,8,8)

Ce théorème de Képler est ainsi démontré !

Retour aux Situations Connexes