Les pavages archimédiens du plan

Durée :

Connaissances et capacités exigibles :

Connaissances	Capacités
Polygones réguliers.	Construire un triangle équilatéral, un carré, *un hexagone régulier, un octogone* connaissant son centre et un sommet.
Angle inscrit, angle au centre.	*Connaître et utiliser la relation entre un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc.*

Commentaires :

L'étude de l'angle au centre et de l'angle inscrit n'est pas nécessaire à la résolution du problème des pavages archimédiens du plan mais c'est l'occasion d'en parler aux élèves. Ce point peut aussi être traité en exercice rituel.

Contenu :

I. Mise en oeuvre de la situation
II. Analyse a priori du problème
III. Une proposition de « plan » pour l'étude ce problème
IV. Trace écrite a priori pour les polygones réguliers
V. Trace écrite a priori pour les angles au centre et angles inscrits

Doc 1 - Durée: 2 fois 50 min

Thème : Mise en oeuvre de la situation

➡1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 10-15 min)

Temps de présentation des enjeux de la séance

Présentation du nouveau contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves.

Rechercher, émettre des conjectures, faire des essais (dessins), prendre des initiatives… Une place importante est accordée ici à la recherche des conditions pour qu'un pavage puisse être réalisé.

Temps de familiarisation avec problème

Présentation du problème, lecture et relecture collective de l'énoncé, explication du vocabulaire.

Temps de recherche individuelle (au moins 5 min)

Appropriation du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

➡ 2ème phase : recherche en groupe (entre 30 min et 1 heure)

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourages à formuler des conjectures, trouver des éléments de preuve, apporter des justifications etc.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

➡ 3ème phase : mise en commun et débat (au moins 30 min)

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

➡ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 10 min)

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les points techniques évoqués par les élèves
- les raisonnements et méthodes utilisés
- les savoirs mathématiques utilisés

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. **A écrire en rouge dans le cahier d'exercice**.

Il faut compter au moins 2 heures pour une mise oeuvre complète

Remarque : Tous les pavages n'auront peut-être pas été trouvés et les conditions pas forcément explicitées. Ces points seront abordés lors des différents problèmes

Doc 2 -

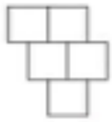
Thème : Analyse a priori de la situation

Enoncé du problème

Un polygone régulier est un polygone *convexe* dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur. Les polygones réguliers qui sont à votre disposition ont 3, 4, 5, 6, 7 et 8 côtés.

Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers, sans trou, ni superposition et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones.

On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous :



Avec les polygones qui sont à votre disposition, quels sont les pavages archimédiens du plan qui existent ? Comment être certains que les pavages construits sont bien valides ?

Sur votre affiche, vous collerez un extrait de chaque pavage construit, vous justifierez leur existence et vous énoncerez la ou les conditions pour qu'un pavage archimédien existe.

Solution du problème

Les deux conditions nécessaires sont :
- les polygones réguliers doivent avoir leurs côtés de même longueur
- la somme des angles en chaque sommet du pavage doit être égale à 360°

Avec les polygones qui sont mis à disposition, voici les pavages archimédiens qu'il est possible de construire :

Pavages réguliers	Pavages semi-réguliers	
(3,3,3,3,3,3)	(3,3,3,3,6)	(3,6,3,6)
(4,4,4,4)	(3,3,3,4,4)	(3,4,6,4)
(6,6,6)	(3,3,4,3,4)	(4,8,8)

Les conditions nécessaires sont intuitives. La liste exhaustive des pavages archimédiens est plus compliquée à justifier.
La démonstration complète est disponible dans le document « Doc2_PavageArchimédien_Exprime ».

Analyse des méthodes et procédures

Méthodes :

- construction des pavages à l'aide des polygones prédécoupés
- mesure des angles directement sur les figures
- mesure des longueurs directement sur les figures
- Recherche des angles d'un polygones réguliers (facile dans les cas de 3, 4 et 6 côtés)

Conjectures facilement accessibles :

- les pavages réguliers (avec un seul type de polygone régulier)
- quelques pavages semi-réguliers (qui mélange plusieurs sortes de polygones réguliers)
- Faux pavage : il est fort probable que le pentagone régulier soit utilisé alors qu'il ne convient pas en réalité.

Les mathématiques travaillées et à travailler

En arithmétiques :

- divisibilité, division euclidienne
- opération sur les nombres entiers

En géométrie :

- propriété sur les angles d'un polygone régulier
- propriété sur l'angle au centre d'un polygone régulier
- caractérisation des polygones réguliers
- méthodes de construction des polygones réguliers.

Doc 3 -

Thème : Proposition de plan pour l'étude de ce problème

Ce qui peut apparaitre dans le bilan de la recherche

- Des propositions de pavages réguliers (en général vrais)
- Des propositions de pavages semi-réguliers (il se peut qu'il y ait un faux pavage proposé)
- Une condition sur les longueurs
- Une condition sur les angles
- …

Proposition de prolongements, appelés « études » pour travailler le programme à partir de ce bilan.

Etude 1 - Etude des polygones réguliers

Afin de valider officiellement les pavages proposés lors du bilan, il faut étudier les propriétés des polygones manipulés. C'est l'occasion de revoir une méthode de construction et de retrouver les formules donnant l'angle au centre et l'angle d'un polygone régulier. On pourra établir un tableau récapitulatif.

Etude 2 - Validation des pavages proposés

On passe en revue tous les pavages proposés et on vérifie qu'ils respectent bien les deux conditions nécessaires sur les longueurs et sur les angles.

Doc 4 -

Thème : Trace écrite a priori pour les polygones réguliers

Voir document « PolygonesRéguliers_3e.pdf » dans le dossier *Notes de cours*.

Contenu:

I. Les polygones : définitions

- **Définition d'un polygone et d'un polygone régulier**

II. Propriétés des polygones réguliers

- **Caractérisation des polygones réguliers avec l'inscription dans un cercle**
- **Propriété des angles d'un polygone régulier**
- **Représentation géométrique des polygones réguliers convexes à 3, 4, 5, 6, 7 et 8 côtés.**

Doc 5 -

Thème: Trace écrite a priori pour les angles au centre et angles inscrits

I. Angles au centre, angles inscrits

Définition : Un angle dont le sommet est sur un cercle et dont les côtés coupent ce cercle est appelé **angle inscrit** dans ce cercle.

Définition : Un angle dont le sommet est le centre d'un cercle est appelé **angle au centre** de ce cercle.

Propriété : Si, dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.

Exemple : On dit que l'angle au centre $\hat{O}$ intercepte l'arc BC et on dit que l'angle inscrit $\hat{A}$ intercepte l'arc BC.
Dans ce cas, comme l'angle au centre et l'angle inscrit interceptent le même arc, l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.