

Table des matières

1	Situation mathématique	1
2	Quelques éléments de mise en œuvre	2

1 Situation mathématique

Un cycliste monte le col du Coq à une moyenne de 18km/h (ce qui, au passage, est plutôt une bonne performance!). Arrivé au sommet, il se demande à quelle vitesse il lui faudra redescendre pour que sur l'ensemble du parcours, il double sa vitesse moyenne de la montée.

Résumé de la méthode

L'erreur classique consiste à utiliser une moyenne arithmétique en écrivant :

$$\frac{18 + x}{2} = 36$$

ce qui donne le résultat : $x = 54\text{km/h}$

Il y a plusieurs raisonnements pour montrer l'impossibilité de doubler sa moyenne :

- Imaginons qu'il ait monté en une heure le col du Coq. Pour doubler sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours c'est à dire atteindre 36 km pour une heure, il devrait descendre en 0s puisqu'il a déjà épuisé son temps.
- Soit d la distance à parcourir pour monter au col du Coq. Soit t_M le temps que le cycliste met pour monter. Soit t_D le temps qu'il doit mettre dans la descente pour doubler sa vitesse moyenne. On a :

$$\begin{cases} 18 = \frac{d}{t_M} \\ 36 = \frac{2d}{t_M + t_D} \end{cases}$$

ce qui conduit à $t_M = t_M + t_D$ soit $t_D = 0$

- D'une façon plus générale, si v_1 est la vitesse moyenne d'un mobile sur une distance aller de d et v_2 la vitesse de retour, la vitesse moyenne sur l'aller-retour v est la moyenne harmonique de v_1 et v_2 ; en effet :

$$v = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

Dans ce cas, on aurait :

$$36 = \frac{2 \times 18 \times v_D}{18 + v_D}$$

ce qui n'est pas possible.

Analyse des méthodes possibles par les élèves

Les relations temps distance parcourue vitesse sont bien sûr au cœur de ce problème mais aussi la notion de moyenne.

Les élèves peuvent être amenés à résoudre ce problème en écrivant ces relations et en les traitant algébriquement. C'est une très bonne occasion de mettre en œuvre et de donner du sens au calcul algébrique.

En terme de connaissances, les prérequis à cette recherche sont :

- connaissance de la relation $vt = d$,
- résolution de deux équations à deux inconnues avec des paramètres,

Les mathématiques travaillées et à travailler

Ce peut être pour les élèves l'occasion d'une discussion ou d'un débat concernant le sens de la « moyenne ». De quelle moyenne parle-t-on ? Quand est-il judicieux d'utiliser la moyenne arithmétique ? Géométrique ? Harmonique ? En prolongement, on peut se poser la question de la « position » de ces moyennes les unes par rapport aux autres.

Une autre compétence travaillée dans ce problème est la compétence à modéliser une situation et de la traiter dans le modèle mathématique.

2 Quelques éléments de mise en œuvre

Une possible mise en œuvre pourrait être :

Proposition de l'énoncé et demande de précision - 5min.

Il est essentiel de bien s'assurer que tous les élèves ont bien compris le problème ;

Recherche individuelle - 10 min.

Cette phase est très importante pour que chaque élève puisse se projeter dans une solution.

Recherche d'un consensus en groupe - 10min.

Il s'agit de commencer un débat au sein du groupe. Si plusieurs solutions apparaissent, le professeur peut encourager les élèves à défendre leur solution en donnant des arguments.

Mise en commun de toutes les solutions - 20min.

C'est le lieu du débat scientifique dans la classe faisant apparaître les arguments des uns et des autres.