Régions dans un disque
Exemples de mise en œuvre dans la classe

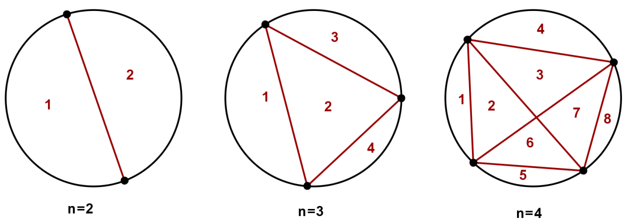
Équipe DREAM

12 juillet 2020

Table des matières

1 Énoncé du problème

« Lorsque qu'on se donne deux points sur un cercle, le segment qui les joint détermine deux régions dans le disque.
Et avec 3 points ? avec 4 points ? et avec n points, quel est le nombre maximum de régions dans le disque ? »



2 Scénario(s) dans la classe

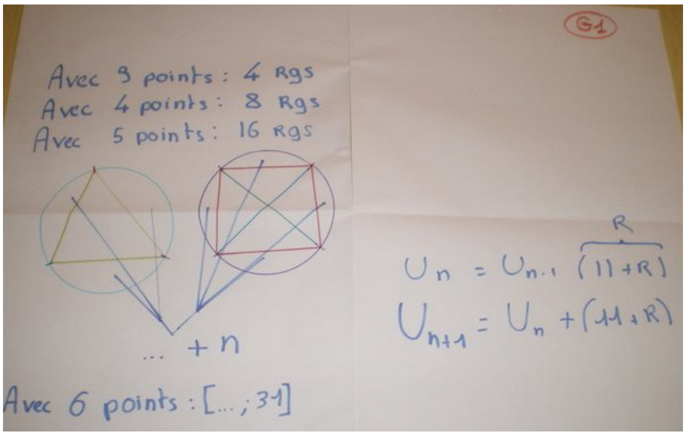
2.1 En première S

Cette classe comporte 36 élèves, donc 9 groupes ont été formés par le professeur (groupes hétérogènes).
Suite à l'absence de 3 d'entre eux, ce sont 8 groupes qui ont travaillé sur ce problème (7 groupes de 4 et 1 groupe de 5).
Les groupes seront nommés G1, G3, G4, G5, G6, G7, G8 et G9
La séance a duré 2 heures, le 6 juin 2009 de 8h à 10h, au lycée Ampère Bourse, à Lyon.
La salle est grande mais limite en raison du nombre élevé de groupes à placer.
Voici les phases de cette séance avec leurs durées respectives :

- Enoncé du problème, consignes de travail et placement des élèves en groupes dans la classe : 10 min
- Recherche des élèves : 60 min
- Pause : récolte des affiches et classement 5 min
- Mise en commun et débats : 40 min

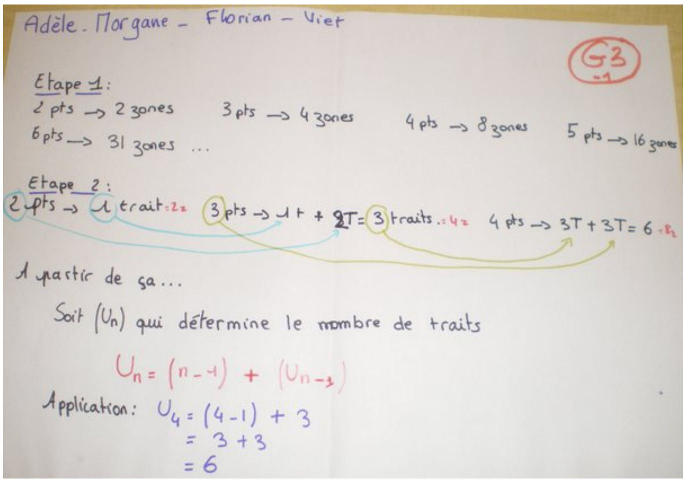
3 Production(s) d'élève(s)

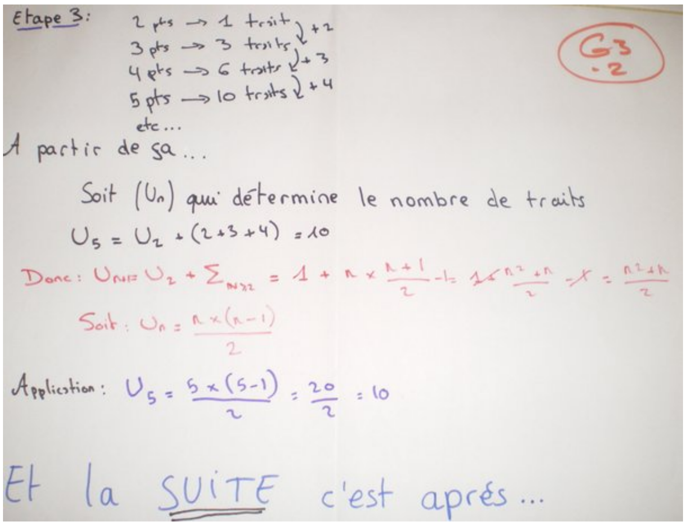
3.1 Groupe 1



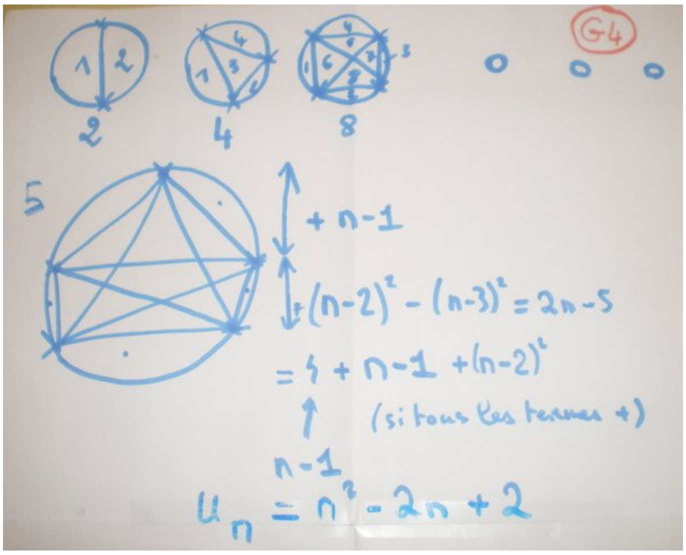
3.2 Groupe 2

3.3 Groupe 3

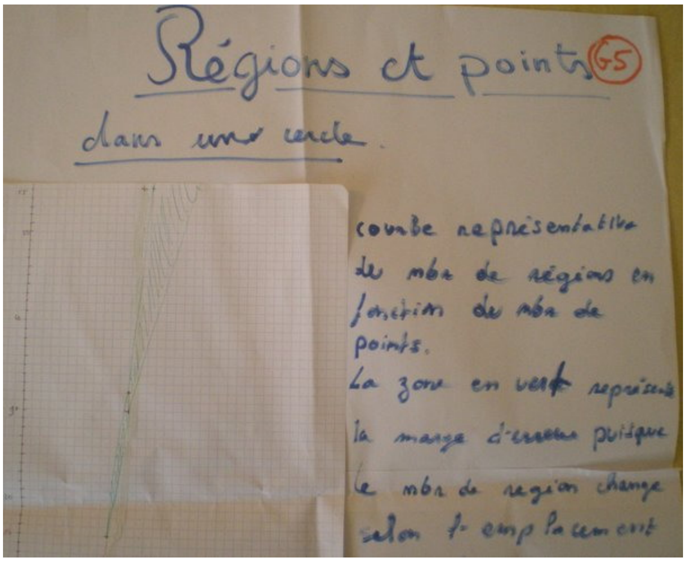


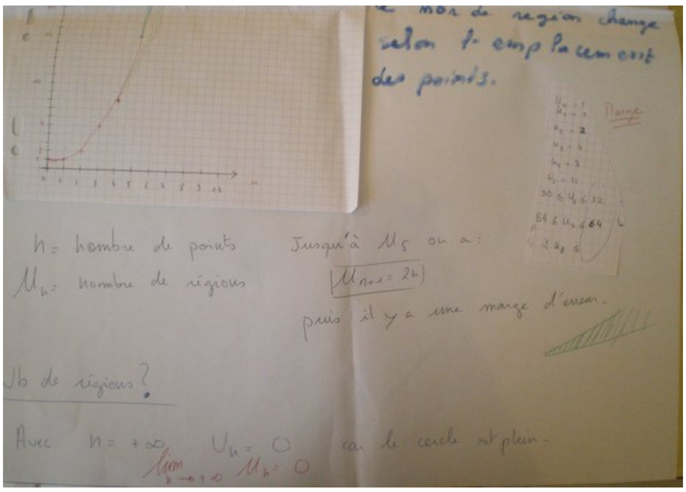


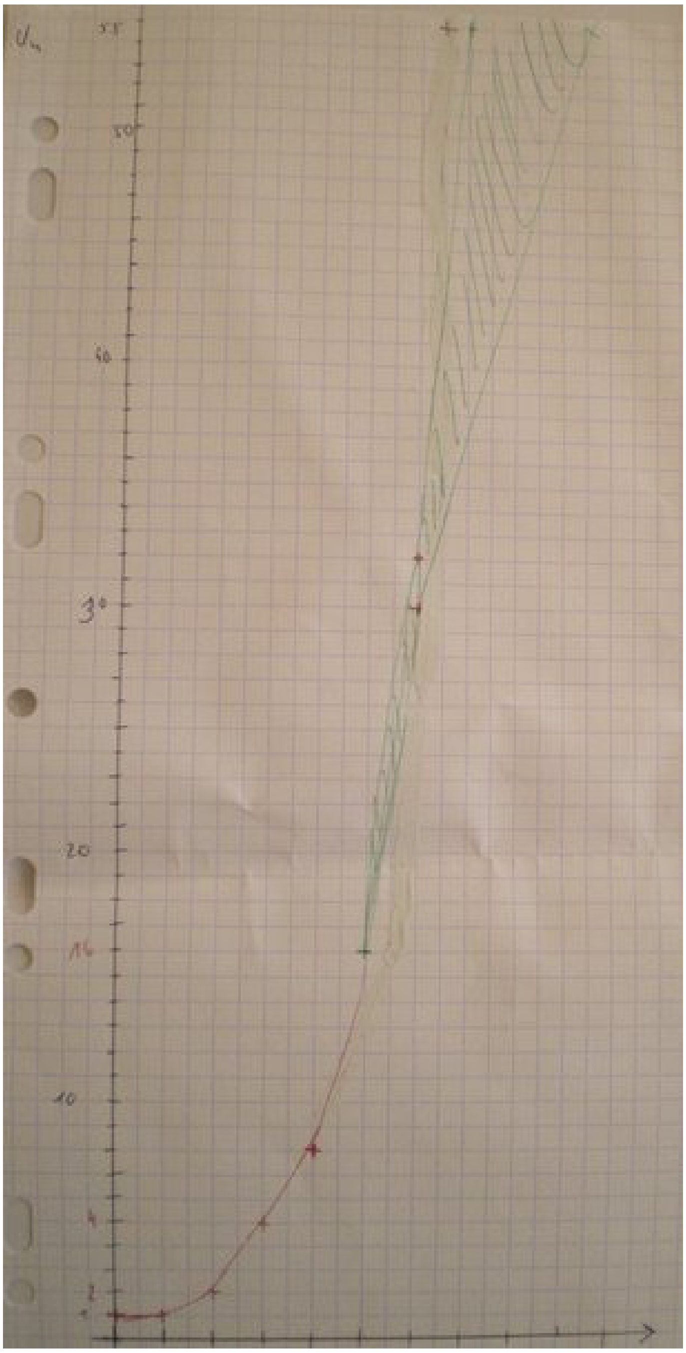
3.4 Groupe 4



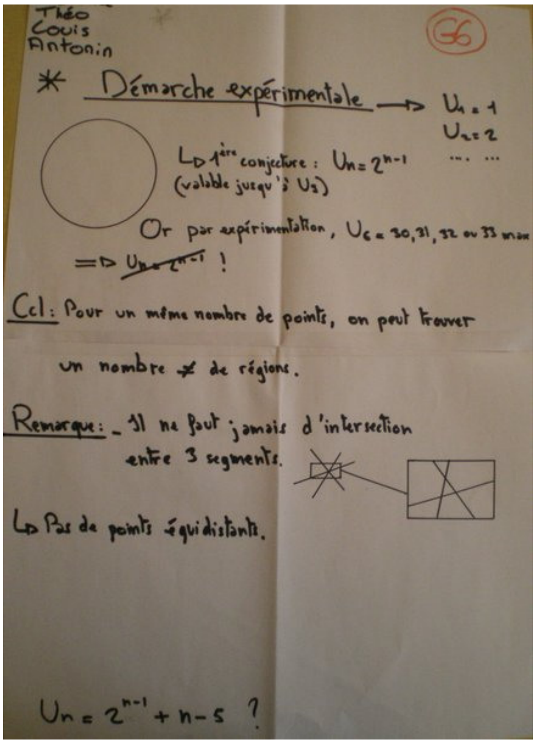
3.5 Groupe 5



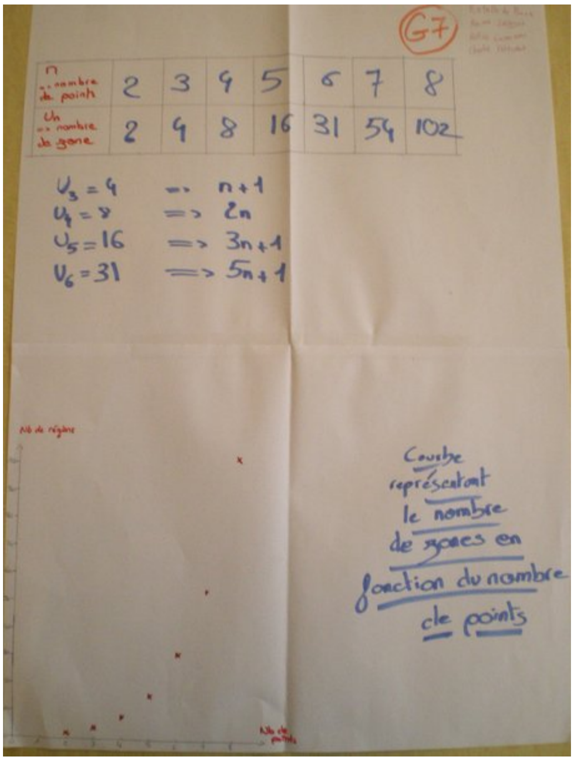



U_n
50
40
30
20
16
10
4
2

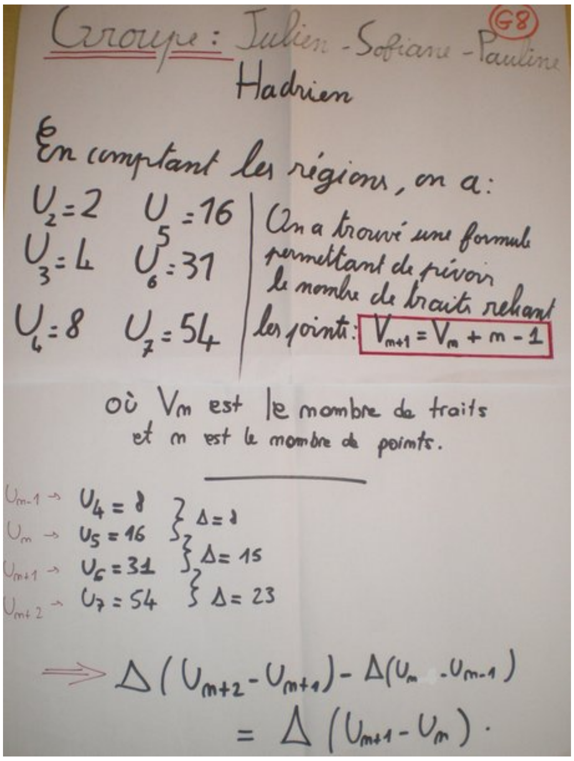
3.6 Groupe 6



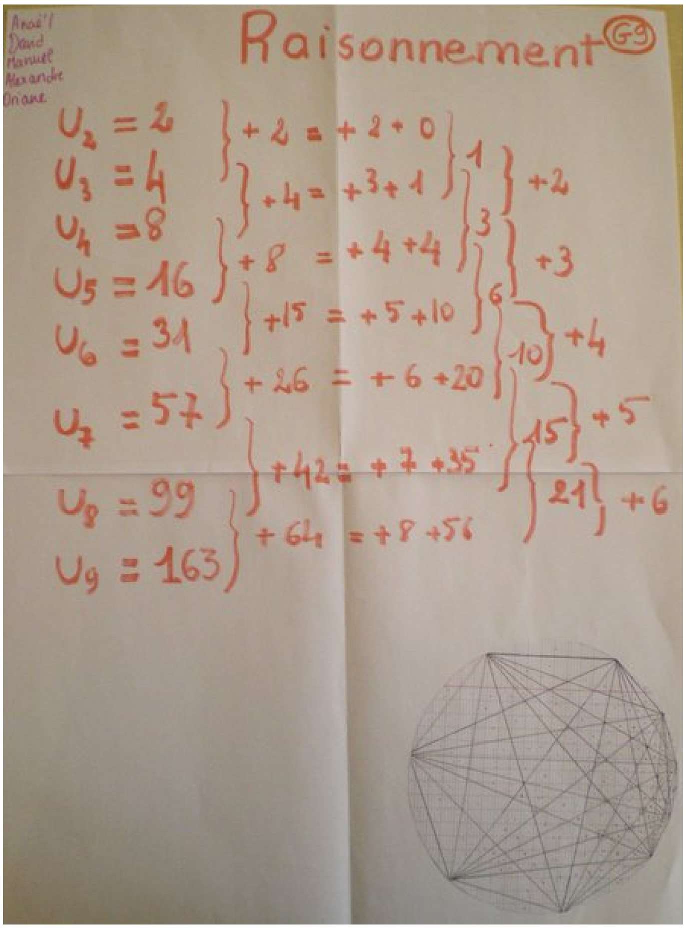
3.7 Groupe 7



3.8 Groupe 8



3.9 Groupe 9



4 Comptes rendus (de l'enseignant)

4.1 De l'enseignant

Les élèves ont joué le jeu et se sont bien investis dans ce travail. Bien qu'ils n'aient pas l'habitude de travailler en groupes dans le cours de mathématiques, ces derniers ont en général bien fonctionné ; le fait que ce soit le professeur qui les connaît bien qui ait constitué les groupes y est sans doute pour beaucoup.

Bilan : l'ordre de passage dans la mise en commun sera de la production la moins aboutie à la plus aboutie.
Chaque groupe a désigné un rapporteur (ou deux) : il présente l'affiche, la démarche suivie, les questions qu'ils se sont posées lors de la résolution.
Un temps est laissé ensuite pour les questions des autres élèves sur l'affiche et sur les explications de son rapporteur.
Voici l'ordre de passage des groupes : G6 G4 G1 G5 G7 G3 G8 G9

4.2 Groupe 1

Étude expérimentale sur des cas particuliers (3, 4, 5 et 6 points) puis recherche d'une relation de récurrence du type « suite arithmétique » (on en voit le modèle dans l'utilisation des notations : (11+R) qui est ensuite noté R...)

Interprétation : ces élèves essayent de se ramener à un type de connaissance bien stabilisé pour eux dans un problème du domaine discret, qu'ils ont reconnu ; la « raison » de la suite est liée au fait que l'on « rajoute » des régions lorsqu'on rajoute un point sur le cercle, comme en témoigne le dessin.

4.3 Groupe 2

4.4 Groupe 3

Bonne recherche du nombre de cordes déterminées par n points sur un cercle (que les élèves appellent « traits »). les étapes de la recherche sont très bien repérées et rédigées.

La recherche est d'abord expérimentale sur de petites valeurs de n ; une relation de récurence est ensuite induite (sans être expliquée et démontrée).

La troisième étape consiste en la recherche de la forme explicite du terme de la suite qui donne le nombre de cordes (bon réinvestissement de la formule donnant la somme des n premiers entiers).

On notera aussi la rédaction de la vérification de la formule trouvée sur le cas $n = 5$.

Les élèves sont conscients que la réponse à la question posée n'est pas donnée (« et la suite c'est après ») ; ils espèrent que la détermination du nombre de cordes sera utile pour le nombre de régions.

4.5 Groupe 4

Étude expérimentale sur des cas particuliers (2, 3, 4, et 5 points) puis recherche de la formule explicite qui donne le nombre de régions en fonction du nombre de points.

Cette recherche est effectuée sur le cas $n = 5$ et appuyée sur le dessin, mais le nombre de points est désigné par « n » et la surface est divisée en trois parties, avec écriture du nombre de régions ajoutées aux $n-1$ régions en bordure (repérées par un point sur le dessin).
Le calcul de u_n reprend cette vision de la surface : 4 (soit $n-1$) plus $n-1$ (expliqué sur le dessin) plus $(n-2)^2$qui ne correspond pas à l'un des calculs du dessin...
La réponse est fausse et n'est pas vérifiée par le groupe sur les exemples étudiés au début.

4.6 Groupe 5

Étude expérimentale sur des cas particuliers (3, 4, 5 et 6 points) puis tracé de la courbe donnant u_n en fonction de n.
On notera que la représentation graphique est celle d'une fonction continue. En marge du graphique :
les résultats expérimentaux et ceux prévisibles avec la courbe tracée. Les termes après u_6 sont encadrés.
Les élèves ont cherché une formule explicite. Ils donnent 2^n en précisant « jusqu'à u_5 » puis précisent qu'ensuite il y a « une marge d'erreur » sans doute parce qu'ils ont déterminé u_6 à la main, en comptant.
Pour ces élèves, le nombre de régions tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (en contradiction avec leur courbe).
Leur argument « car le cercle est plein » montre la confusion réalisée entre nombre de régions et aire de ces régions.
On notera aussi la confusion entre « cercle » et « disque ».

4.7 Groupe 6

Étude expérimentale sur des cas particuliers (2, 3, 4, 5 et 6 points) qualifiée par les élèves eux-mêmes de « démarche expérimentale » puis émission d'une conjecture $u_n = 2^{n-1}$.
Les élèves sont conscient que cette conjecture est fausse pour $n = 6$: ils ont produit plusieurs dessins pour lesquels le nombre de régions étaient soit 30, soit 31, soit 32, soit 33. Ils ont donc dû faire des erreurs de comptage...
L'avant-dernière partie de l'affiche consiste à rédiger la condition nécessaire pour que l'on obtienne le nombre maximal de régions (en particulier, pas de polygone régulier).
La dernière ligne donne une formule explicite accompagnée d'un point d'interrogation (les élèves ont modifié la formule exponentielle en apportant un terme correctif pour qu'elle devienne vraie pour $n = 6$ selon leur dénombrement
(erreur : ils trouvent 33 au lieu de 31).

4.8 Groupe 7

Étude expérimentale sur des cas particuliers (2, 3, 4, 5 6, 7 et 8 points). u_7 et u_8 sont erronés.

Recherche de l'écriture de u_n en fonction de n : les élèves fournissent 4 expressions en fonction de n, toutes affines et différentes.

Devant l'échec de cette recherche d'une formule générale affine, ils font une représentation graphique des termes de la suite trouvés.

4.9 Groupe 8

Étude expérimentale sur des cas particuliers (2, 3, 4, 5 , 6 et 7 points). u_7 est erroné.

Étude du nombre de cordes (appelées « traits ») : détermination d'une relation de récurrence (sans démonstration rédigée).

Calcul des différences finies du premier ordre sur les termes de u_4 à u_7 de la suite « nombre de régions ».

Remarque sur ces différences finies, traduite par une formule « générale » :
$\triangle(u_{n+2} - u_{n+1}) - \triangle(u_n - u_{n-1}) = \triangle(u_{n+1} - u_n)$.

Cette formule est fausse car u_7 est erroné.
Les élèves ne l'utilisent pas pour déterminer le terme suivant, u_8 .

4.10 Groupe 9

Étude expérimentale sur des cas particuliers (2, 3, 4, 5 6, 7, 8 et 9 points).
Le dessin correspondant à u_9 est collé sur l'affiche, il a demandé un travail très minutieux.

Calcul des différences finies du premier ordre pour la suite (u_n).

Notons v_n la différence $u_{n+1} - u_n$.

Les élèves écrivent v_n sous la forme $n + w_n$ puis calculent les différences finies pour cette suite (w_n).

Posons $t_n = w_{n+1} - w_n$.
Ils découvrent que cette suite (t_n) est une suite arithmétique de raison 1, ce qui va permettre de la compléter à l'infini, puis en remontant les calculs, il en sera de même pour la suite initiale (u_n). Ils vérifient leurs résultats avec les dessins.
Ce groupe a réussi à résoudre le problème en utilisant une méthode basée sur l'utilisation de différences finies.

Nous ne nous attendions pas à cette méthode, mais elle est très naturelle pour les élèves : ils cherchent une relation entre deux termes successifs qui soit du type « ajout d'un terme simple » et cela aboutit lorsqu'ils arrivent à une suite connue, arithmétique.

Ce modèle additif est accentué par le type de problème et l'interprétation qu'en fait ce groupe : ils cherchent dans leur deuxième étape de calculs combien de régions sont ajoutées à celles « du contour »
(les régions situées entre le cercle et les cordes les plus proches, soit pour n points : n cordes et n régions).