La somme de 10 entiers consécutifs

Équipe DREAM

30 juillet 2020

Table des matières

1 Le problème mathématique

Pour citer le document : Equipe DREAM (2020). La somme de 10 entiers consécutifs. Consulté sur URL.

1.1 L'énoncé

Trouver le plus rapidement possible la somme de 10 nombres entiers consécutifs.

Par exemple la somme de 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

Ce problème provient des travaux[1] de Barallobres (Barallobres, 2007 ; Barallobres & Giroux, 2008). On peut aussi trouver une analyse dans Durand-Guerrier (2010).

1.2 Des pistes de solution

De nombreuses méthodes de calcul sont possibles. Nous en présentons trois ci-dessous.

Posons n le premier nombre de la liste des 10 nombres entiers consécutifs et S la somme cherchée.

- **Méthode du successeur**
  On décompose chaque nombre en fonction de n.
  Ce qui donne $= n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7)+(n+8)+(n+9) = 10\times n+(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 10n+45$.
  Dans l'exemple ci-dessus, on obtient ainsi $S = 10\times 17+45 = 215$.

  Cette méthode peut être obtenue par différentes procédures (cf. paragraphe 3.2.) : par décomposition décimale de chaque nombre de la série ($17 = 10+7$; $18 = 10+8$; etc.), par décomposition de chaque nombre à partir du premier nombre de la série ($18 = 17+1$; $19 = 18+1$; etc.), en posant l'addition en colonne (la somme des unités est toujours 45, la somme des dizaines est le premier nombre).

- **Méthode de la médiane**
  La valeur de la médiane de la série est égale à $\frac{n+(n+9)}{2}$ En décomposant chaque nombre en fonction de la valeur de la médiane, on obtient $S = 10\times\frac{n+(n+9)}{2}$.
  Dans l'exemple ci-dessus, on obtient ainsi $S = 10\times\frac{17+26}{2} = 10\times 21,5 = 215$.

  Cette méthode peut être obtenu par différentes procédures (cf. paragraphe 3.2.) : par regroupement des nombres par paires ($17+26 = 18+25 = 19+24 = 20+23 = 21+22$), par décomposition de chaque nombre en fonction de la valeur médiane ($17 = 21,5-4,5$; $26 = 21,5+4,5$, etc.), par observation des séries proposées et des résultats obtenue (remarquer que le résultat est 10 fois la médiane).

- **Méthode des paires**
  Utiliser (ou retrouver) le résultat de la somme de p nombres entiers consécutifs.

1. Barallobres, G. (2007). Introduction à l'algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés. *Thèse de doctorat.*
Barallobres G. & Giroux, J. (2008). Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective. In *Actes électroniques du colloque EMF 2006*, Sherbrooke, 27-31 mai 2006.
Durand-Guerrier, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques. In *Expériementer des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. INRP Cédérom.

$2S = (n+n+9)+(n+1+n+8)+(n+2+n+7)+(n+3+n+6)+(n+4+n+5)+(n+5+n+4)+(n+6+n+3)+(n+7+n+2)+(n+8+n+1)+(n+9+n) = (n+n+9)\times 10 = (2n+9)\times 10$
D'où $S = (2n+9) \times 5$

Dans l'exemple ci-dessus, on obtient ainsi $2S = 43 \times 10$ et $S = 43\ times 5 = 215$.

Cette méthode peut être obtenu par différentes procédures (cf. paragraphe 3.2.) : par regroupement des nombres par paires ($17 + 26 = 43$; $18 + 25 = 43$; etc.), à la "manière de Gauss" ($17 + 26 = 18 + 25 = 19 + 24 = 20 + 23 = 21 + 22$).

Le problème mathématique plus général est le calcul de p nombres entiers consécutifs à partir de n.

Notons $S(n, p)$ la somme de p nombres consécutifs commençant à n.

- Méthodes des paires (avec p pair) :

$$S(n,p) = [n + (n + p - 1)] \times \frac{p}{2}$$

- Méthode de la médiane :

$$S(n,p) = [n + \frac{p-1}{2}] \times p$$

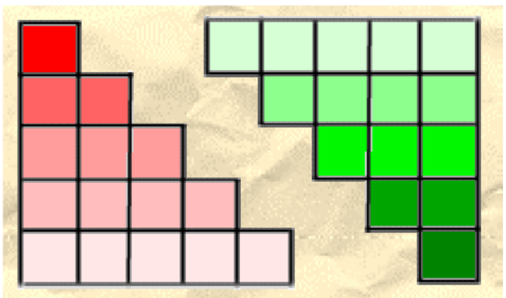
- Méthode du successeur :
  $S(n, p) = n \times p + S(0, p)$
  Or $S(0, p) = (p - 1) \times \frac{p}{2}$
  Donc

$$S(n,p) = n \times p + (p-1) \times \frac{p}{2}$$

Remarques : **Remarque 1** : l'un des entiers p ou $p - 1$ est pair.

Remarque 2 : $S(1, p) = \frac{p(p+1)}{2}$
Il s'agit de la somme des p premiers entiers naturels.

Remarque 3 : Pour calculer la somme des p premiers entiers naturels en utilisant une méthode géométrique, il peut imaginer un escalier composé de p carrés, surmontés de ($p\breve{}1$) carrés, etc.



En reprenant un escalier identique et procédant comme sur la figure ci-dessus, nous obtenons un rectangle composé de carrés. Le nombre de carrés sur la longueur est $p + 1$ et le nombre de carrés sur la largeur est p. Il y a donc $p(p + 1)$ carrés au total.
Pour déterminer la somme $S = 1 + 2 + \ldots + p$, il suffit de diviser par 2 cette somme. Nous obtenons $S = \frac{p(p+1)}{2}$.

2 Objets potentiellement travaillés/Connaissances en jeu

Les objectifs d'apprentissage dépendent du niveau de la classe et peuvent être multiples.

- *A l'école primaire et au début du collège*, deux objectifs principaux peuvent être visés avec cette situation : travailler le calcul mental et le calcul réfléchi ; travailler la numération décimale, mettre les élèves en situation de recherche pour leur apprendre à dégager des "règles générales" à partir d'exemples.
- *A partir du cycle 4*, cette situation peut avoir comme objectif principal l'introduction (ou le travail) du calcul littéral. En effet le problème peut permettre, d'une part de motiver l'introduction d'une formule pour décrire un programme de calcul, et d'autre part de donner du sens à l'utilisation des lettres.
- *Au lycée*, les objectifs d'apprentissage peuvent être : réactiver la relation entre écritures algébriques et programmes de calcul et chercher à déterminer plusieurs procédures de résolution possibles, ce qui permet de retravailler plusieurs notions mathématiques (moyenne, médiane, somme de Gauss, suite arithmétique, etc.).
- *En formation initiale ou continue des professeurs des écoles*, cette situation permet de revenir, d'un point de vue mathématique sur la numération décimale de position, sur des stratégies de calcul mental, d'un point de vue didactique sur la notion de variable didactique et d'un point de vue pédagogique, sur le travail en groupe.

3 Analyses didactiques

3.1 Variables de la situation

Il y a trois variables didactiques majeures dans cette situation.

La première est la valeur de n (premier nombre de la liste) qui peut être : un multiple de 10 ou non ; un "grand" nombre ou non. Si la valeur est un multiple de 10 alors certaines procédures s'appuyant sur la décomposition décimale sont favorisées (par exemple les procédures 2, 3 et 4). Si la valeur de n est inférieure à 50, les calculs ne sont pas nécessairement couteux et donc les élèves peuvent s'y engager facilement. Au delà, on peut faire l'hypothèse que les calculs peuvent freiner l'engagement dans une procédure (par exemple la procédure 7).

La seconde variable didactique est la valeur de p (nombre de nombres consécutifs) qui peut être : une dizaine entière ou non. Dans le cas de 10 nombres consécutifs, les points de vue "décomposition décimale" et "successeur" conduisent au même résultat car toutes les unités de 1 à 9 apparaissent. Mais ce n'est plus le cas avec 8 ou 11 nombres entiers consécutifs. Et cela l'est à nouveau avec 20, 30 ou 40. La méthode la plus rapide pour 10 nombres consécutifs (à savoir la procédure 6 : prendre le cinquième nombre et mettre 5 à droite) ne se généralise pas. Elle est liée de manière intrinsèque à la signification des chiffres dans l'écriture décimale. La méthode des écarts (médiane - procédure 5) se généralise en prenant en compte la parité. Elle mobilise le point de vue successeur (et prédécesseur).

La troisième variable didactique est l'utilisation d'une calculatrice. Le recours systématique à la calculatrice pourrait empêcher les élèves à mettre en œuvre d'autres stratégies et donc de ne pas repérer des régularités ou l'élaboration d'une formule. Dans le cas d'un recours ponctuel à la calculatrice, les élèves pourraient s'en servir, soit comme aide à l'engagement dans le problème, soit comme outil de validation. Dans le premier cas, les élèves vont vite se rendre compte que le calcul à la calculatrice n'est pas efficace car trop long. Cette méthode ne va donc *a priori* pas être privilégiée. Dans le second cas, elle peut servir à assurer les élèves du résultat de leur calcul, obtenu par une des procédures détaillées ci-dessus.

Remarque : notons que le fait que toute la liste ou le premier nombre de la liste seulement soit donné peut être considéré comme une variable didactique. En effet, si toute la liste est écrite, cela favorise des procédures qui utilisent tous les nombres ou le dernier nombre de la liste (par exemple les procédures 1, 4, 7). En revanche, si le premier nombre uniquement est donné, les procédures 2 et 3 sont très efficaces puisque c'est celles qui mènent à la formule $10n + 45$ où n est le premier nombre de la liste.

3.2 Procédures possibles

Sept procédures peuvent être envisagées, du cycle 3 au lycée (et au-delà).

- **Procédure 1** : il s'agit de faire des groupements en utilisant les compléments à 10.
  Par exemple : 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24
  $16 + 24 = 40; 17 + 23 = 40; 18 + 22 = 40; 19 + 21 = 40$;
  il reste 15 et 20 ; $4 \times 40 + (20 + 15) = 160 + 35$.

  Autre exemple : 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25
  $16 + 24 = 40; 17 + 23 = 40; 18 + 22 = 40; 19 + 21 = 40$;
  il reste 20 et 25 ; $4 \times 40 + (20 + 25) = 160 + 45$.

  Dernier exemple : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30
  $21 + 29 = 50; 22 + 28 = 50; 23 + 27 = 50; 24 + 26 = 50$;
  il reste 25 et 30 ; $4 \times 50 + (25 + 30) = 200 + 55$.

  Cette procédure peut favoriser le repérage ce que que toutes les unités entre 0 et 9 apparaissent une fois et une seule dans chaque série. Mais elle peut être un obstacle pour reconnaître le rôle particulier de 45. Le rôle de n peut alors permettre de favoriser ou non cette reconnaissance.

- **Procédure 2** : il s'agit d'utiliser la décomposition décimale, c'est à dire décomposer chaque nombre en dizaine entière plus unités.
  Exemple : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
  $10 + 7, 10 + 8, 10 + 9, 20, 20 + 1, 20 + 2, 20 + 3, 20 + 4, 20 + 5, 20 + 6$
  $3 \times 10 + 7 \times 20 + (7 + 8 + 9 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 170 + 45$

  Cette procédure met en évidence le rôle particulier de 45 et fait apparaître la forme générale « multiplier le premier nombre par 10 et ajouter 45 ».

  Autre exemple : 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29
  $20, 20 + 1, 20 + 2, 20 + 3, 20 + 4, 20 + 5, 20 + 6, 20 + 7, 20 + 8, 20 + 9$
  $10 \times 20 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 10 \times 20 + 45$

  Cet exemple met en évidence le rôle de n puisque commencer par une dizaine entière peut favoriser l'apparition de cette procédure.

- **Procédure 3** : il s'agit de décomposer les nombres à partir du premier nombre de la série.
  Exemple : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
  $17, 17 + 1, 17 + 2; 17 + 3; 17 + 4; 17 + 5; 17 + 6; 17 + 8; 17 + 9$
  $17 \times 10 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 170 + 45$

  C'est ce qui conduit le plus naturellement à la forme générale : *Multiplier le premier nombre par 10 et ajouter 45.*

Le rôle de n est important dans cette procédure car les séries commençant par un multiple de 10 peuvent favoriser l'apparition de l'utilisation de la décomposition à partir du premier nombre.

- **Procédure 4** : il s'agit de regrouper les nombres par paire de sommes égales.
  Exemple : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
  $17 + 26 = 18 + 25 = 19 + 24 = 20 + 23 = 21 + 22 = 43$
  $5 \times 43 = 215$.

  Ou encore, à la manière de Gauss :
  17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
  26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17
  43, 43, 43,43, 43, 43, 43, 43, 43, 43
  $10 \times 43 = 430$;
  430 : 2 = 215.

  Dans cette procédure, la valeur de n peut influencer sur la difficulté à calculer les sommes si cette valeur est "grande" (supérieur à 100 par exemple en fin de primaire).

- **Procédure 5** : il s'agit de prendre la valeur médiane et multiplier par 10.
  Exemple : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
  17- 18 - 19 - 20 - 21 - 21,5 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26
  $21,5 \times 10 = 215$.

  Ici la valeur de n n'influence pas sur la mise en œuvre de cette stratégie. En effet le calcul est toujours le même : une multiplication par 10.

- **Procédure 6** : il s'agit de prendre le 5è nombre de la liste et ajouter 5 à droite.
  Exemple : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
  215

  Ici la valeur de n n'influence pas sur la mise en œuvre de cette stratégie. En effet la procédure porte sur le cinquième nombre de la liste, indépendamment du premier nombre et il n'y a aucun calcul à mener.

- **Procédure 7** : il s'agit de poser l'addition en colonne. Cette procédure peut conduire vers une méthode rapide. En effet, si on le fait plusieurs fois, avec des nombres de deux chiffres par exemple, le calcul montre que :
  — Le résultat se termine toujours par 5 ;
  — On a toujours une retenue de 4 ;
  — La somme des chiffres des dizaine est égale au premier nombre de la liste ;
  — Le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l'ajout de 4 à ce premier nombre.

  La valeur de n peut "bloquer" cette stratégie si c'est un "grand" nombre car les élèves s'engageront moins dans le calcul posé à effectuer. Cette valeur peut également favoriser la reconnaissance de 45 ou du premier nombre multiplier par 10 (par exemple lorsque c'est un multiple de 10).

Remarque :
Deux connaissances mathématiques sont principalement mobilisées dans ces procédures :

- Le système d'écriture des nombres : la numération décimale de position (dans les procédures 1, 2, 4, 6, 7).
- La construction des entiers via la notion de successeur. L'addition est alors vue comme l'itération du successeur (procédures 3, 5, 7).

Cette situation met en lumière une distinction importante dans le travail numérique entre des résultats et des méthodes qui sont dépendantes d'un système de numération donnée (par exemple les critères de divisibilité) et les résultats qui sont liés de manière intrinsèque aux nombres, indépendamment du système d'écriture (être divisible par 3 être un nombre premier).

4 Comptes rendus de mise en œuvre en classe

4.1 Énoncé et consignes

Déterminer le plus rapidement possible la somme de 10 nombres entiers consécutifs.

Série 1 : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

Cette situation peut être proposée dès le cycle 3, c'est à dire dès le CM1. En effet, pour s'engager dans la situation, il faut que l'algorithme de l'addition de nombres entiers soit disponible et mobilisable par les élèves. Elle peut ensuite être proposée à tous niveaux, jusqu'au lycée. Elle est égale très riche pour la formation des enseignants ou la formation de formateurs.
Nous proposons ci-dessous deux types de scénarios.

4.2 Scénario utilisé en classe et en formation initiale

Les élèves travaillent en équipe de 3 ou 4. La situation comporte plusieurs étapes.

- **Étape 1** : On propose deux suites de nombres (voir ci-dessous), les élèves réfléchissent de manière individuelle et lèvent la main lorsqu'ils ont trouvé la solution. Le plus rapide gagne.
  Série 1 : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
  Série 2 : 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
- **Étape 2** : En groupe, on propose aux élèves d'échanger sur leurs méthodes et de choisir celle qui permet de trouver la somme le plus vite possible et ce quels que soient les nombres proposés. On leur propose alors de tester leur choix sur deux autres séries de nombres.
  Série 3 : 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56 Série 4 : 84, ...
- **Étape 3** : On propose aux élèves de réfléchir aux raisons qui permettent d'expliquer pourquoi leur méthode marche pour toutes les séries de 10 nombres entiers naturels consécutifs. La situation se termine par une présentation du travail de chaque groupe et un bilan des méthodes utilisées.

Le défi de la rapidité est ici un moteur de la situation qui permet l'engagement des élèves dans l'action, sous réserve que les valeurs choisies (pour les séries) leur permettent de faire des calculs conduisant à des résultats auxquels ils peuvent se fier. Les différentes phases permettent de garantir des phases d'action (étapes 1 et 2), de formulation (étapes 2 et 3) et de validation (étape 3), phases essentielles pour construire les apprentissages mathématiques, en référence à la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau.

4.3 Scénario utilisé en formation de formateurs

Ce scénario s'appuie sur les étapes d'un jigsaw.
Les stagiaires travaillent en groupe de 3 ou 4. Chaque groupe a une couleur (par exemple 4 groupes, un bleu, un vert, un jaune et un orange)

La situation comporte plusieurs étapes.

- **Étape 1** : On propose trois suites de nombres (voir ci-dessous), les stagiaires réfléchissent de manière individuelle et lèvent la main lorsqu'ils ont trouvé la solution. Le plus rapide gagne.
  Série 1 : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
  Série 2 : 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
  Série 3 : 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56
- **Étape 2** : En groupe (de couleur), on propose aux stagiaires d'échanger sur leurs méthodes et de choisir celle qui permet de trouver la somme le plus vite possible et ce quels que soient les nombres proposés. On leur propose alors de tester leur choix sur une autre série de 10 nombres entiers consécutifs puis tout de suite après sur une série de 8 nombres entiers consécutifs. Le groupe le plus rapide gagne.
  Série 4 : 649, 650, 61, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658
  Série 5 : 42, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48
- **Étape 3** : On propose aux stagiaires de constituer des groupes multicolores (c'est à dire formé d'un membre du groupe vert, d'un membre du groupe bleu, d'un membre du groupe jaune et d'un membre du groupe orange) pour échanger sur leurs procédures, pour calculer la somme de 10 nombres entiers consécutifs et pour calculer la somme de 8 nombres entiers consécutifs.
- **Etape 4** : On reforme les groupes de couleur initiaux et on laisse quelques temps de réflexions pour échanger. Enfin, on propose une dernière série de 8 nombres entiers consécutifs :
  Série 6 : 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

  La situation se termine par un bilan des méthodes utilisées.

Le défi de la rapidité est ici un moteur de la situation qui permet léngagement des stagiaires très rapidement dans la situation. Les différentes phases, et en particulier les séries de 8 nombres entiers consécutifs, permettent le questionnement des stagiaires sur leurs procédures du point de vue de la validité et de la généralisation. On peut également revenir sur le processus de dévolution/institutionnalisation avec les élèves ainsi que sur la notion de variable didactique.

4.4 Productions d'élèves

En classe de sixième
Le problème de 10 nombres consécutifs a été mis en place dans une classe de 6e lors du premier cours de mathématiques de l'année. L'objectif était de travailler le calcul mental et le calcul réfléchi et mettre les élèves en situation de recherche dès le début de l'année.

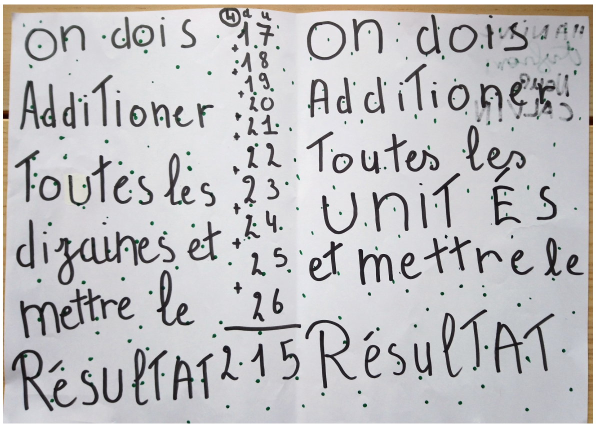
Deux séances ont été nécessaires : une première séance où les élèves jouent d'abord individuellement, puis en groupe et une deuxième séance où les groupes expliquent à l'aide d'une affiche les méthodes utilisées.

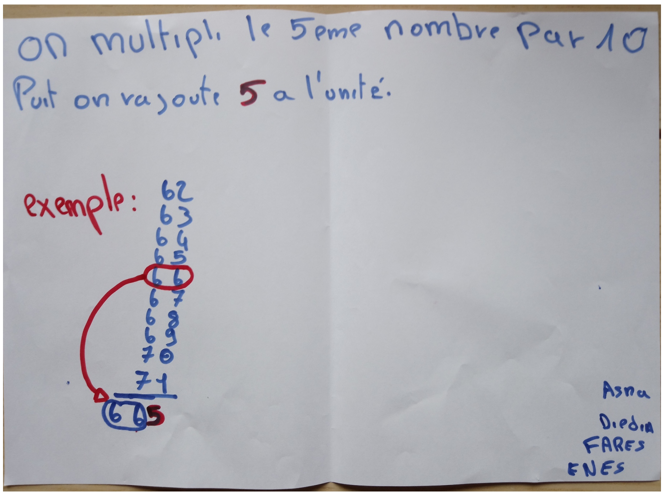
L'enseignant a présenté le jeu en projetant une série d'exemples au tableau et en expliquant les différentes phases de travail.

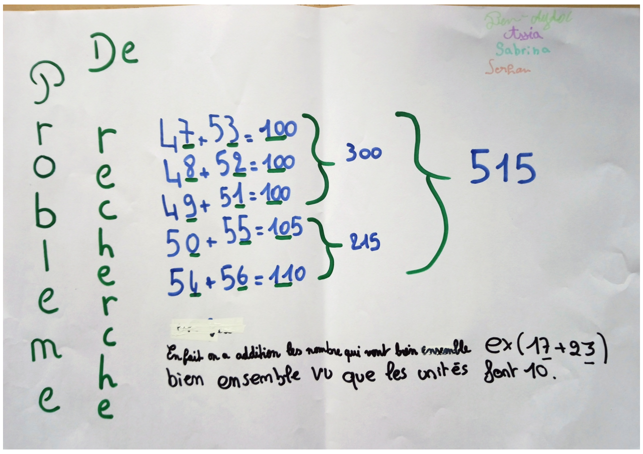
Lors de la première phase individuelle, chaque élève a travaillé sur son cahier de recherche en calculant la somme des dix nombres entiers consécutifs projetés au tableau. L'explicitation du terme « consécutifs » a été nécessaire. Dans cette première phase ceux qui trouvent la somme en premiers ont gagné. Ils lèvent la main en silence sans dire le résultat obtenu. Les élèves tiennent trace des calculs effectués et de leurs réflexions. L'enseignant propose successivement trois suites de nombres.

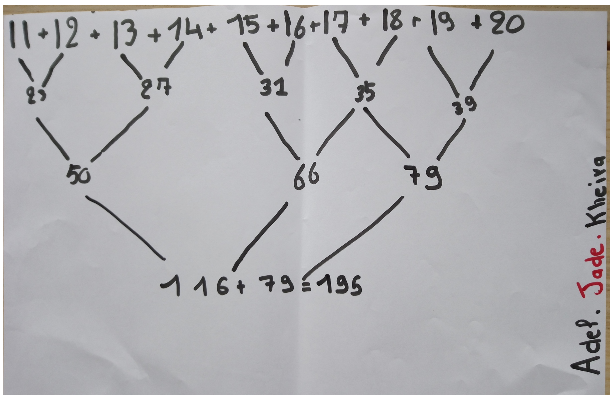
Les élèves participent tous, ils sont concentrés sur leur tâche. C'est plutôt ardu au début.

A partir de la quatrième série, les élèves travaillent en groupe. Avant de commencer, ils partagent entre eux les méthodes utilisées et ils ont le droit d'en choisir une ou de tester les différentes méthodes avant de choisir celle qu'ils présenteront sur l'affiche. Le jeu reprend avec des nombres de plus en plus grands. Une fois les séries terminées, les groupes doivent produire l'affiche qu'ils viendront présenter à la classe.









Une deuxième séance est nécessaire pour que les groupes puissent passer à l'oral et présenter à leurs camarades le travail effectué et les méthodes choisies. Plusieurs méthodes sont présentées et le débat est riche : on parle de techniques de calcul astucieuses, des rangs des chiffres et aussi de comment a été que de travailler en groupe et de se mettre d'accord pour avancer dans la recherche.

Pour ce premier travail de groupe et de recherche, le bilan a été centré sur ce qu'est chercher en mathématiques et sur comment mener un travail de groupe. Cela a permis de mettre des bases pour la suite de l'année.