

Le château de cartes

Équipe DREAM

14 juillet 2020

Table des matières

1	Énoncé du problème	2
2	Choix du problème	2
2.1	Compétences transversales	2
2.2	Connaissances mathématiques	3
3	Analyse mathématique du problème	3
4	Analyse de productions	3

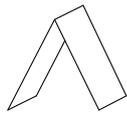
1 Énoncé du problème

Un château de cartes à un étage est composé de deux cartes.

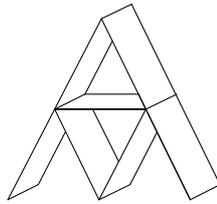
Un château de cartes à deux étages est composé de sept cartes.

Pour réaliser trois étages, il faut quinze cartes.

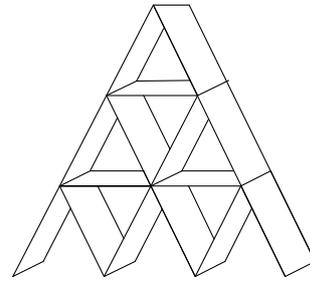
Combien faut-il de cartes pour réaliser un château de sept étages ? Trente étages ? Cent étages ?



1 étage



2 étages



3 étages

2 Choix du problème

2.1 Compétences transversales

- Un sujet simple à comprendre et pour lequel les élèves peuvent se lancer facilement dans la recherche : ils peuvent faire des dessins pour comprendre le mécanisme de construction des châteaux et déterminer rapidement le nombre de cartes nécessaires pour obtenir des châteaux ayant un petit nombre d'étages.
- Mettre en place une stratégie pour compter le nombre de cartes.
- Organiser sa recherche, ses idées de manière claire.
- Transmettre sous forme de textes, schémas, figures, codages... sa démarche de recherche à une personne extérieure.
- Être capable de raisonner avec logique et rigueur et donc savoir : (capacité du socle commun à acquérir)
 - * identifier un problème et mettre au point une démarche de résolution ;
 - * identifier, expliquer, rectifier une erreur ;
 - * distinguer ce dont on est sûr de ce qu'il faut prouver ;
 - * mettre à l'essai plusieurs pistes de solution.

- Communiquer, à l'écrit, en utilisant un langage mathématique adapté (capacité du socle commun à acquérir)

2.2 Connaissances mathématiques

- Utilisation éventuelle de la notion de suite.
- Utilisation de la formule permettant de calculer la somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Ce sujet peut être traité sans faire appel à des aspects du programme de mathématiques du collège ce qui peut avoir comme objectif d'intéresser des élèves plutôt décrocheurs face aux mathématiques.

3 Analyse mathématique du problème

Solution possible

Pour un château à n étages :

$$3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + 3 \times (n-1) + 2 \times n = 3 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n-1) + 2n = 3 \times \frac{n(n-1)}{2} + 2n$$

Ici, on compte les cartes 3 par 3 sur chaque étage et on ajoute les cartes de la base.

On peut aussi essayer de définir une suite par récurrence où n désigne le nombre d'étages et U_n le nombre de cartes nécessaires à la réalisation d'un château à n étages :

$$U_n = U_{n-1} + (n-1) + 2n \text{ avec } U_1 = 2$$

4 Analyse de productions

- Une erreur rencontrée fréquemment : les élèves comptent des cartes horizontales à la base du château alors qu'il n'y en a pas.
- Les élèves peuvent mettre en place des techniques de comptages différentes :

* Certains comptent toutes les cartes horizontales et ajoutent les cartes obliques.

Etages:

$$\begin{array}{r} 4 \times 2 = 8 \\ 6 \times 2 = 12 \\ 5 \times 2 = 10 \\ 4 \times 2 = 8 \\ 3 \times 2 = 6 \\ 2 \times 2 = 4 \\ 1 \times 2 = 2 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$56 + 21 = 77.$$

Cartes qui tiennent les étages:

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 5 \\ + 4 \\ + 3 \\ + 2 \\ + 1 \\ \hline 21 \end{array}$$

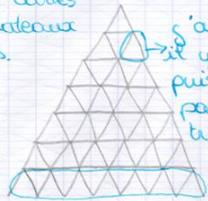
* D'autres peuvent compter les cartes par groupe de 3 puis ajouter les cartes de la base.

1) avec 7 étages de cartes :

j'ai fait le schéma -

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 3 \\ \hline 63 \end{array} \quad 63 + 14 = 77$$

il ya 77 cartes dans le chateau de 7 étages.

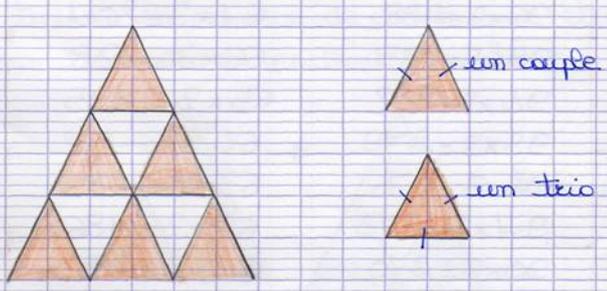


j'ai compter combien il y avait de triangles puis je l'ai multiplié par 3 car dans un triangle il y a 3 côtés puis compter combien il y avait de carte dans le 1^{er} étage et je l'additionne avec le résultat de ma multiplication.

* Certains essayent de trouver une relation entre le nombre d'étages et le nombre de cartes et parfois ils l'expriment sous forme d'une formule.

- Certains définissent des objets pour pouvoir faciliter leur comptage.

ex :



un couple

un trio

/ nombre de carte.
une base = une carte.